Journal für die reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826

Herausgegeben von

Helmut Hasse

Band 183

Heft 4

Ausgegeben am 11. August 1941

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung / J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung / Georg Reimer / Karl J. Trübner / Veit & Comp.

Berlin 1941

Band 183. Heft 4.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Chung, Kai-Lai, A generalization of an inequality in the elementary theory of numbers	193—196
Lemke, H., Über die Gleichung der Gaskugeln und andere Differentialgleichungen von ähnlicher Form	197—231
Haenzel, G., Die Diracsche Wellengleichung und das Ikosaeder	232—242
Kowalewski, Gerhard, Zur natürlichen Geometrie der irreduziblen G_6 von Berührungstransformationen	243—250
Bitterlich-Willmann, Johann, Eine Verallgemeinerung der Fermatschen Vermutung	251—252

An unsere Mitarbeiter!

Es ist unbedingt notwendig, daß alle zur Einsendung gelangenden Manuskripte sowohl vollkommen druckfertig, als auch in gut lesbarer, möglichst Maschinen-Schrift gehalten sind, wobei die gotischen und griechischen wie überhaupt alle besonderen Typen durch Buntstift bezeichnet werden. Nachträgliche Korrekturen verursachen wesentliche Kosten, die sich naturgemäß auf die Preisgestaltung des Journals mit auswirken müssen. Machen sich also aus irgendeinem Grunde Textänderungen eines Beitrages notwendig, so sind diese der Schriftleitung sofort mitzuteilen, wenn sie die endgültige Annahme und Weitergabe an den Verlag meldet; Korrekturen nach dem Vorliegen des Satzes dürfen sich ausschließlich auf die Verbesserung von Satzfehlern erstrecken.

Manuskripte, die den eingangs erwähnten Vorschriften entsprechen, ermöglichen auch der Schriftleitung eine raschere Prüfung als schwer leserliche und können infolgedessen schneller zum Druck gelangen.

Im Interesse des schnellen Erscheinens der einzelnen Hefte erhalten die Herren Verfasser grundsätzlich nur eine Korrektur ihrer Beiträge. Da seitens der Schriftleitung die Korrekturen in typographischer Hinsicht sorgfältige Lesung finden und die richtige Ausführung der Autor-Korrekturen genau überwacht wird, hoffen wir, auch so allen Wünschen gerecht zu werden.

Die Herren Verfasser erhalten von allen Abhandlungen 75 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Sendungen für das Journal erbittet die Schriftleitung unter der Anschrift:
An die Schriftleitung des Journals für die reine und angewandte Mathematik
Professor Dr. Helmut Hasse, Göttingen, Mathematisches Institut, Bunsenstr. 3-5.

Druck von Walter de Gruyter & Co., Berlin W 35
Printed in Germany

A generalization of an inequality in the elementary theory of numbers.

By *Kai-Lai Chung* in Kunming (China).

Introduction. The following theorem has been recently proved by H. Rohrbach [1]:

Theorem. Let $A(m_1, m_2, \ldots, m_n)$ denote the number of positive integers below $\prod_{\nu=1}^{n} m_\nu$ not divisible by any of the $m_\nu (\nu = 1, 2, \ldots, n)$. Then for any positive integers m_ν the following inequality holds:

$$\text{(I)} \qquad A(m_1, m_2, \ldots, m_n) \geqq \prod_{\nu=1}^{n} m_\nu \left(1 - \frac{1}{m_\nu}\right).$$

Moreover equality holds only in the Dirichlet case of pairwise prime numbers.

At the same time, a second proof has been independently given by H. Heilbronn, who also gave a generalization [2]. The present note is concerned with another generalization in a different direction.

Statement of the generalization. Given n sets of b numbers each (all the numbers considered here being positive integers):

$$\mathfrak{S}_1 \equiv \{m_1^{(1)}, \ldots, m_b^{(1)}\}, \ldots, \mathfrak{S}_n \equiv \{m_1^{(n)}, \ldots, m_b^{(n)}\}.$$

Any set $\{r_1, \ldots, r_b\}$ is said to be divisible by $\mathfrak{S}_\nu$, if and only if

$$m_j^{(\nu)} \mid r_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, b),$$

and is said to be prime to $\mathfrak{S}_\nu$, if and only if

$$(m_j^{(\nu)}, r_j) = 1 \qquad (j = 1, 2, \ldots, b).$$

By ${}_bA_n$ we denote the number of sets $\{r_1, \ldots, r_b\}$ where

$$1 \leqq r_j \leqq \prod_{\nu=1}^{n} m_j^{(\nu)} \qquad (j = 1, 2, \ldots, b),$$

which are not divisible by any of the given sets $\mathfrak{S}_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$, two sets being already regarded as different if they consist of the same numbers in different order. Then for any system of sets $\mathfrak{S}_\nu$ the following inequality holds:

$$\text{(II)} \qquad {}_bA_n \geqq \prod_{\nu=1}^{n} P_\nu \left(1 - \frac{1}{P_\nu}\right),$$

where $P_\nu = m_1^{(\nu)} m_2^{(\nu)} \cdots m_b^{(\nu)}$ denotes the product of all numbers in $\mathfrak{S}_\nu$. Moreover, equality holds only in the case of pairwise prime sets $\mathfrak{S}_\nu$; or when at least one of the $\mathfrak{S}_\nu$ consists of 1's solely.

---

[1]) H. Rohrbach, Beweis einer zahlentheoretischen Ungleichung, Journal für d. reine u. angew. Math. **177** (1937), 193—196.

[2]) H. Heilbronn, On an inequality in the elementary theory of numbers, Proc. of the Cambridge Phil. Soc. **33** (1937), 207-209. I am indebted to Dr. Rohrbach for this reference and other helps.

Proof. The proof proceeds by mathematical induction on n. For this purpose let us assume that the proposition is true for $n-1$. We denote the right member of the statement by ${}_bB_n$, i. e.

$$\prod_{\nu=1}^{n}(P_\nu - 1) = {}_bB_n .$$

Then

$$(1) \qquad {}_bA_{n-1} \geqq {}_bB_{n-1} .$$

As in the statement above, we regard throughout all permutations of a set as different from each other. Then the number of sets $\{r_1, \ldots, r_b\}$ where $1 \leqq r_j \leqq \prod_{\nu=1}^{n-1} m_j^{(\nu)}$ is equal to $\prod_{j=1}^{b}\prod_{\nu=1}^{n-1} m_j^{(\nu)} = \prod_{\nu=1}^{n-1} P_\nu$, and the number of sets defined in the same way which are divisible by at least one of the $\mathfrak{S}_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n-1)$ is equal to

$$\prod_{\nu=1}^{n-1} P_\nu - {}_bA_{n-1} = {}_bR_{n-1} ,$$

so that by the assumption (1),

$$(2) \qquad {}_bR_{n-1} = \prod_{\nu=1}^{n-1} P_\nu - {}_bB_{n-1} - D_{n-1}$$

where $D_{n-1} \geqq 0$.

Now let $\{r_1, \ldots, r_b\}$ be a set defined as above and $\{q_1, \ldots, q_b\}$ another set such that $0 \leqq q_j \leqq m_j^{(n)} - 1$. We then consider the set

$$(3) \qquad q_1 \prod_{\nu=1}^{n-1} m_1^{(\nu)} + r_1, \ldots, q_b \prod_{\nu=1}^{n-1} m_b^{(\nu)} + r_b .$$

If we keep $\{r_1, \ldots, r_b\}$ fixed and let $\{q_1, \ldots, q_b\}$ take all possible combinations within the assigned limits, we obtain P_n sets in all. Futher, if we let both sets $\{r\}$ and $\{q\}$ take all possible combinations, it is clear that the set (3) runs once through all sets $\{\varrho_1, \ldots, \varrho_b\}$ where $1 \leqq \varrho_j \leqq \prod_{\nu=1}^{n} m_j^{(\nu)}$. Now if the set $\{r_1, \ldots, r_b\}$ is divisible by an $\mathfrak{S}_\nu (\nu = 1, 2, \ldots, n-1)$ the set (3) is divisible by the same $\mathfrak{S}_\nu$; conversely, if the set (3) is divisible by an $\mathfrak{S}_\nu (\nu = 1, 2, \ldots, n-1)$, the same is true of the set $\{r_1, \ldots, r_b\}$. By this one-to-one correspondence we conclude that the number ${}_bS_{n-1}$ (say) of sets $\{\varrho_1, \ldots, \varrho_b\}$ where $1 \leqq \varrho_j \leqq \prod_{\nu=1}^{n} m_j^{(\nu)}$, which are divisible by at least one of the $\mathfrak{S}_\nu (\nu = 1, 2, \ldots, n-1)$, is equal to

$$(4) \qquad {}_bS_{n-1} = P_n \, {}_bR_{n-1} .$$

It remains to consider the divisibility by an additional $\mathfrak{S}_n$. It is evident that the number of sets $\{\varrho_1, \ldots, \varrho_b\}$ where $1 \leqq \varrho_j \leqq \prod_{\nu=1}^{n} m_j^{(\nu)}$, which are divisible by $\mathfrak{S}_n$, is equal to $\prod_{\nu=1}^{n} P_\nu$. Among these however, there are sets which are already divisible by at least one of the $\mathfrak{S}_\nu (\nu = 1, 2, \ldots, n-1)$; these have been already taken account of and must be excluded here. The number ${}_bQ_{n-1}$ (say) of these sets is certainly not less than the number of sets $\{r_1, \ldots, r_b\}$ where $1 \leqq r_j \leqq \prod_{\nu=1}^{n-1} m_j^{(\nu)}$, which are divisible by at least one of the $\mathfrak{S}_\nu (\nu = 1, 2, \ldots, n-1)$; for, given any set of the latter kind, by multiplying each number in it by the corresponding one in $\mathfrak{S}_n$, we obtain a set of the former kind. Thus

$$(5) \qquad {}_bQ_{n-1} \geqq {}_bR_{n-1} ,$$

where equality holds if and only if $\mathfrak{S}_n$ is prime to each of the $\mathfrak{S}_\nu (\nu = 1, 2, \ldots, n-1)$ [3]).

Therefore the number of sets $\{\varrho_1, \ldots, \varrho_b\}$ where $1 \leqq \varrho_j \leqq \prod_{\nu=1}^{n} m_j^{(\nu)}$, which are divisible by $\mathfrak{S}_n$ but not by any previous $\mathfrak{S}_\nu (\nu = 1, 2, \ldots, n-1)$, is equal to

$$\prod_{\nu=1}^{n-1} P_\nu - {}_bQ_{n-1} \leqq \prod_{\nu=1}^{n-1} P_\nu - {}_bR_{n-1} . \tag{6}$$

Hence from (4) and (6), by addition, the number of sets $\{\varrho_1, \ldots, \varrho_b\}$ where $1 \leqq \varrho_j \leqq \prod_{\nu=1}^{n} m_j^{(\nu)}$, which are divisible by at least one of the $\mathfrak{S}_\nu (\nu = 1, 2, \ldots, n)$, i. e. the number denoted by $\prod_{\nu=1}^{n} P_\nu - {}_bA_n$, satisfies the inequality

$$\begin{aligned} \prod_{\nu=1}^{n} P_\nu - {}_bA_n &\leqq P_n \, {}_bR_{n-1} + \prod_{\nu=1}^{n-1} P_\nu - {}_bR_{n-1} \\ &= (P_n - 1)\left(\prod_{\nu=1}^{n-1} P_\nu - {}_bB_{n-1} - D_{n-1}\right) + \prod_{\nu=1}^{n-1} P_\nu \\ &= \prod_{\nu=1}^{n} P_\nu - {}_bB_n - (P_n - 1) D_{n-1} \end{aligned}$$

so that

$${}_bA_n \geqq {}_bB_n + (P_n - 1) D_{n-1} \qquad (D_{n-1} \geqq 0) . \tag{7}$$

For any fixed b, obviously ${}_bA_1 = P_1 - 1 = {}_bB_1$; and in the case $n = 2$, it can be easily shown that ${}_bA_2 = {}_bB_2$ or ${}_bA_2 > {}_bB_2$ according to whether $\mathfrak{S}_1$ and $\mathfrak{S}_2$ are mutually prime or not. Hence the induction is complete.

Moreover, from (5), (6) and (7) it is evident that the necessary and sufficient conditions for equality in (7) are:

(i) ${}_bQ_{n-1} = {}_bR_{n-1}$, for which we have found $(\mathfrak{S}_n, \mathfrak{S}_\nu) = 1$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n-1)$ as the necessary and sufficient condition,

(ii) either $P_n = 1$, i. e. $\mathfrak{S}_n$ consists of 1's solely; or $D_{n-1} = 0$, which means ${}_bA_{n-1} = {}_bB_{n-1}$.

Hence, again by induction, the necessary and sufficient condition we wanted to establish is that the $\mathfrak{S}_\nu (\nu = 1, 2, \ldots, n)$ are pairwise prime or at least one of the $\mathfrak{S}_\nu$ consists of 1's solely. In the latter case we have in fact ${}_bA_n = {}_bB_n = 0$.

Remarks. In the special case $b = 1$, we obtain Rohrbach's theorem.

Another special case noteworthy is that all the m's in a set are equal to one another; we then obtain an extension of higher order of Euler's φ-function. This result however can be directly deduced from Rohrbach's theorem.

Further, we have

$${}_bA_n = \left(\prod_{\nu=1}^{n} P_\nu\right) {}_bT_n ,$$

where

---

[3]) In fact, if we put

$$C_n = \prod_{j=1} (m_j^{(1)} m_j^{(2)} \cdots m_j^{(n-1)}, m_j^{(n)})$$

where the bracket denotes the greatest common divisor, we have

$${}_bQ_n = C_n \, {}_bQ_{n-1} .$$

If we use this equality, we finally obtain the following equality connecting ${}_bA_n$ and ${}_bB_n$:

$$D_n = {}_bA_n - {}_bB_n = (C_n - 1)\left(\prod_{\nu=1}^{n-1} P_\nu - {}_bB_{n-1}\right) + (P_n - C_n) D_{n-1} .$$

$$
{}_bT_n = 1 - \sum_{\nu_1} \frac{1}{m_1^{(\nu_1)} m_2^{(\nu_1)} \cdots m_b^{(\nu_1)}} + \sum_{\nu_1<\nu_2} \frac{1}{[m_1^{(\nu_1)}, m_2^{(\nu_2)}][m_2^{(\nu_1)}, m_2^{(\nu_2)}] \cdots [m_b^{(\nu_1)}, m_b^{(\nu_2)}]}
$$

$$
- \sum_{\nu_1<\nu_2<\nu_3} \frac{1}{[m_1^{(\nu_1)}, m_2^{(\nu_2)}, m_1^{(\nu_3)}] \cdots [m_b^{(\nu_1)}, m_b^{(\nu_2)}, m_b^{(\nu_3)}]} + - \cdots
$$

$$
+ \frac{(-1)^n}{[m_1^{(1)}, m_1^{(2)}, \ldots, m_1^{(n)}] \cdots [m_b^{(1)}, m_b^{(2)}, \ldots, m_b^{(n)}]},
$$

the square brackets denoting the least common multiple (cf. the special case $b = 1$ in Rohrbach's paper).

A further generalization in Heilbronn's direction is now immediately obvious.

Finally, I wish to thank Prof. Loo-Keng Hua for the suggestion of the generalization.

National Tsing Hua University, Kunming (China).

Eingegangen 13. April 1939.

Anmerkung der Schriftleitung.

In einem Brief vom 8. 8. 1940 (eingegangen am 22. 4. 1941) teilt Herr K. L. Chung mit, daß er bei der Korrektur der vorstehenden Arbeit (im März 1940) folgende weitere Verallgemeinerung hinzugefügt und unter Zurückführung auf die Ungleichung (I) bewiesen habe:

In an algebraic number field, n ideals $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n$ *may be given. Let* A_n *denote the number of integers in a complete representative residue system* mod $(\mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{a}_2 \cdots \mathfrak{a}_n)$ *which are not divisible by any* $\mathfrak{a}_i$. *Then*

$$
A_n \geqq N(\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_n) \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{N(\mathfrak{a}_i)}\right)
$$

where equality holds only in the case of pairwise prime ideals.

Die Korrektur mit diesem Zusatz sei jedoch vom Postamt in Hongkong angehalten worden.

Über die Gleichung der Gaskugeln und andere Differentialgleichungen von ähnlicher Form.

Von *H. Lemke* in Berlin.

Zu den oft untersuchten Differentialgleichungen von der Form

$$Y\frac{dY}{dX} = P(X) + Q(X)\,Y$$

gehört die von Emden[1]) angegebene Gleichung der Gaskugeln

$$Y\frac{dY}{dX} + \frac{5-\nu}{\nu-1}\,Y + \frac{2(3-\nu)}{(\nu-1)^2}\,X + X^{\nu} = 0, \tag{1}$$

welche bestehen muß, wenn die einzelnen Teile der Gasmasse gegeneinander nach dem Newtonschen Gesetze gravitieren; dabei ist vorausgesetzt, daß die Zustandsänderungen längs des Radius der Kugel durch eine polytrope Kurve dargestellt werden können, d. h. durch die Beziehung

$$pv^k = \text{const.},$$

wo p der Druck, v das Volumen und k eine Konstante ist, die in einfacher Weise mit der Größe ν in der Gleichung (1) zusammenhängt. Emden hat auf seine Gleichung, sowie auf andere, die mit ihr in Verbindung stehen, die Methoden der *numerischen* Integration angewandt und Ergebnisse erhalten, die vom physikalischen Standpunkte aus bedeutungsvoll sind, aber der analytische Charakter der Integrale bleibt im allgemeinen verborgen; denn nur die Fälle $\nu = 1$ und $\nu = 5$ gestatten die Zurückführung auf bekannte elementare Funktionen. Im folgenden soll daher das Problem vom analytischen Standpunkte aus behandelt werden, und zwar nicht allein für die Emdensche Gleichung, sondern auch für einen allgemeinen Typus, zu dem jene gehört. Es wird sich herausstellen, das gewisse Integrationsmethoden, die schon längst bekannt sind, mit Vorteil benutzt und weiter entwickelt werden können.

Der Fall der isothermen Gaskugel ($k = 1$) bleibt in dieser Arbeit unberücksichtigt, weil die zugehörige Differentialgleichung eine wesentlich andere Form besitzt. In einer früheren Abhandlung des Verf. finden sich einige darauf bezügliche Bemerkungen[2]).

---

[1]) R. Emden, Gaskugeln. Anwendungen der mechanischen Wärmetheorie, Leipzig und Berlin 1907.

[2]) H. Lemke, Über die Differentialgleichungen, welche den Gleichgewichtszustand eines gasförmigen Himmelskörpers bestimmen, dessen Teile gegeneinander nach dem Newtonschen Gesetze gravitieren, dieses Journal **142** (1913) S. 118—145.

Erstes Kapitel.
Die Differentialgleichungen und die Singularitäten ihrer Integrale.

1. Die Gleichung der Gaskugeln nimmt die einfachere Gestalt

$$\eta \frac{d\eta}{d\xi} = \eta + \varkappa(\xi - \xi^\nu), \qquad \varkappa = \frac{2(\nu-3)}{(\nu-5)^2}, \tag{2}$$

an, wenn man in (1) $Y = -a\eta$, $X = b\xi$ setzt, wo

$$b^{\nu-1} = \frac{2(\nu-3)}{(\nu-1)^2}, \qquad a = \frac{5-\nu}{\nu-1} b$$

ist. Die Transformation versagt für $\nu = 1$, $\nu = 3$, $\nu = 5$. Im Falle $\nu = 3$ besteht die Gleichung

$$Y \frac{dY}{dX} + Y + X^3 = 0, \tag{3}$$

die trotz ihrer einfachen Form durch die im folgenden benutzten Methoden nicht allgemein integriert werden kann. Der Koeffizient $\varkappa$ ist an den Exponenten ν durch die oben angegebene Relation gebunden; es sollen jedoch auch die Fälle behandelt werden, wo $\varkappa$ irgendeinen beliebigen vorgeschriebenen Wert hat. Der Exponent ν kann zunächst jede reelle positive Zahl sein, und in der Tat kommen gebrochene Werte desselben in den physikalischen Anwendungen vor; aber die folgenden Untersuchungen beschränken sich auf die Annahme, daß ν eine positive ganze Zahl größer als Eins ist. Wenn hiervon abgewichen wird, soll das besonders hervorgehoben werden. Unter dieser Voraussetzung kann man sagen, daß (2) ein spezieller Fall der Gleichung

$$\eta \frac{d\eta}{d\xi} = \eta + F(\xi) \tag{4}$$

ist, wo

$$F(\xi) = c(\xi - \alpha_1)(\xi - \alpha_2) \cdots (\xi - \alpha_\nu)$$

eine ganze rationale Funktion vom Grade ν ist, deren Linearfaktoren von einander verschieden sein mögen. Die letzte Bedingung ist wesentlich; anderenfalls treten Schwierigkeiten auf.

Die Integrale einer Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x, y)}{g(x, y)} \qquad (f \text{ und } g \text{ Polynome in } x \text{ und } y)$$

besitzen entweder bewegliche, d. h. mit den Anfangsbedingungen verschiebbare singuläre Stellen oder feste kritische Punkte, deren Lage sich aus den Koeffizienten von f und g ermitteln läßt. Die beweglichen Singularitäten sind entweder Pole oder algebraische Verzweigungspunkte, die festen im allgemeinen transzendenter Natur[3]).

Die Integrale der Gleichung (4) haben keine beweglichen Pole, dagegen *verschiebbare algebraische Verzweigungspunkte*, wie sich aus folgenden Überlegungen ergibt: Es sei ξ_0 irgendein Wert, für den die Funktion $F(\xi)$ nicht verschwindet; dann kann man

$$F(\xi) = a_0 + a_1(\xi - \xi_0) + a_2(\xi - \xi_0)^2 + \cdots, \qquad a_0 \neq 0,$$

setzen und die rechte Seite von

---

[3]) P. Boutroux, Leçons sur les fonctions définies par les équations différentielles du premier ordre. Avec une note de M. Paul Painlevé, Paris 1908.

$$\frac{d\xi}{d\eta} = \frac{\eta}{\eta + F(\xi)}$$

in eine gewöhnliche Potenzreihe der beiden Veränderlichen η und $\xi - \xi_0$ entwickeln, welche Glieder enthält, die von $\xi - \xi_0$ unabhängig sind:

$$\frac{d\xi}{d\eta} = b_{00}\eta + b_{10}\eta^2 + b_{20}\eta^3 + \cdots + b_{01}\eta(\xi - \xi_0) + b_{11}\eta^2(\xi - \xi_0) + b_{02}\eta(\xi - \xi_0)^2 + \cdots, \; b_{00} \neq 0.$$

Diese Gleichung besitzt ein Integral, welches für $\eta = 0$ den Wert ξ_0 annimmt,

$$\xi - \xi_0 = c_1\eta^2 + c_2\eta^3 + c_3\eta^4 + \cdots, \; c_1 \neq 0,$$

woraus durch Umkehrung

$$\eta = \lambda_1(\xi - \xi_0)^{\frac{1}{2}} + \lambda_2(\xi - \xi_0) + \lambda_3(\xi - \xi_0)^{\frac{3}{2}} + \cdots$$

folgt; ξ_0 ist also ein algebraischer Verzweigungspunkt von der Ordnung 2. Die Koeffizienten λ_m werden aus den a_m durch Rekursionsformeln berechnet; so findet man z. B.

$$\lambda_1 = a_0\sqrt{2}, \; \lambda_2 = \frac{2}{3}, \; \lambda_3 = \frac{\sqrt{2}}{4a_0}\left(a_1 + \frac{2}{9}\right), \; \lambda_4 = -\frac{1}{15a_0^2}\left(a_1 + \frac{2}{9}\right), \ldots.$$

Die *festen Singularitäten*, die für die Gleichung (4) charakteristisch sind, werden erhalten, wenn die Funktion

$$\frac{\eta + F(\xi)}{\eta} = \frac{d\eta}{d\xi}$$

in der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ erscheint, d. h. wenn η und $F(\xi)$ gleichzeitig verschwinden. Die kritischen Punkte stimmen dann mit den α_m überein. Abgesehen von diesen letzteren und den oben betrachteten algebraischen Verzweigungspunkten gibt es im Endlichen keine weiteren Singularitäten für die Integrale der Differentialgleichung (4).

Die Gleichung (3), welche für $\nu = 3$ gilt, kann unter denselben Gesichtspunkten behandelt werden. Es kommen auch hier Integrale mit beweglichen algebraischen Verzweigungspunkten vor, und es existiert ein einziger fester kritischer Punkt, nämlich $X = 0$.

2. Durch die Substitution $\eta = t\frac{d\xi}{dt}$ geht (2) in

$$t^2\frac{d^2\xi}{dt^2} = \varkappa(\xi - \xi^\nu) \tag{5}$$

und (4) in

$$t^2\frac{d^2\xi}{dt^2} = F(\xi) \tag{6}$$

über. Wie sich später zeigen wird, haben diese Gleichungen zweiter Ordnung Integrale, deren Verhalten in der Umgebung der festen kritischen Punkte α_m leichter zu übersehen ist als bei den entsprechenden Differentialgleichungen erster Ordnung. Zunächst soll aber (5) noch weiter transformiert werden. Man setze

$$\tau = t^{-\varepsilon}, \qquad \xi = \beta\tau^{-\alpha}u,$$

wo β eine Konstante, $\varepsilon = \sqrt{1 + 4\varkappa}$, $\alpha = \frac{\varepsilon + 1}{2\varepsilon} = \frac{1 + \sqrt{1 + 4\varkappa}}{2\sqrt{1 + 4\varkappa}}$ ist; man erhält für u als Funktion von τ die Gleichung

$$\frac{d^2u}{d\tau^2} = C\frac{u^\nu}{\tau^\mu}, \tag{7}$$

und es ist $\mu = (\nu - 1)\alpha + 2$, $C = -\dfrac{\beta^{\nu-1}\varkappa}{1 + 4\varkappa}$. Wegen des doppelten Vorzeichens von ε findet man zwei Werte α_1 und α_2 und zwei Werte μ_1 und μ_2, zwischen denen die Beziehungen $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, $\mu_1 + \mu_2 = \nu + 3$ bestehen. Es gibt also zwei Differentialgleichungen von der Form (7):

$$\frac{d^2u_1}{d\tau_1^2} = C\frac{u_1^\nu}{\tau_1^{\mu_1}}, \qquad \frac{d^2u_2}{d\tau_2^2} = C\frac{u_2^\nu}{\tau_2^{\mu_2}};$$

die zweite geht aus der ersten durch die Substitution $u_1 = \tau_1 u_2$, $\tau_1 = \dfrac{1}{\tau_2}$ hervor. Für die *Gaskugeln* ist

$$\varkappa = \frac{2(\nu-3)}{(\nu-5)^2}, \qquad \varepsilon_1 = \frac{\nu-1}{\nu-5}, \qquad \alpha_1 = \frac{\nu-3}{\nu-1}, \qquad \mu_1 = \nu - 1,$$

$$\varepsilon_2 = -\frac{\nu-1}{\nu-5}, \quad \alpha_2 = \frac{2}{\nu-1}, \qquad \mu_2 = 4.$$

Man sieht wiederum, daß in diesem besonderen Falle die Werte $\nu = 1$, $\nu = 3$, $\nu = 5$ ausgeschlossen werden müssen.

Wenn umgekehrt die Gleichung (7) gegeben ist, kann man sie durch die Substitution

$$t = \tau^{-\varepsilon'}, \qquad u = \beta'\tau^{\alpha'}\xi$$

in die Form (5) zurückführen; man hat nur

$$\varepsilon' = \frac{2\mu - \nu - 3}{\nu - 1}, \qquad \alpha' = \frac{\mu - 2}{\nu - 1}, \qquad \beta' = \left[\frac{(\mu-2)(\mu-\nu-1)}{C(\nu-1)^2}\right]^{\frac{1}{\nu-1}}$$

zu setzen; der Koeffizient $\varkappa$ erscheint als Funktion von μ und ν:

$$\varkappa = -\frac{(\mu-2)(\mu-\nu-1)}{(2\mu-\nu-3)^2}. \tag{8}$$

Die Transformation versagt, wenn $\mu = 2$, $\mu = \nu + 1$, $\mu = \dfrac{1}{2}(\nu + 3)$ ist.

In drei Fällen läßt sich (7) durch Quadraturen integrieren, nämlich für $\mu = 0$, $\mu = \nu + 3$, $\mu = \dfrac{1}{2}(\nu + 3)$, und es ist gleichgültig, ob ν eine positive ganze Zahl ist oder nicht.

Für $\mu = 0$ hat man

$$\frac{d^2u}{d\tau^2} = Cu^\nu,$$

woraus durch Integration

$$\frac{du}{\sqrt{u^{\nu+1} - c^{\nu+1}}} = \sqrt{\frac{2C}{\nu+1}}\,d\tau, \quad c \text{ eine Konstante},$$

folgt.

Wenn $\mu = \nu + 3$ ist, setzt man

$$u = \tau U, \quad \tau = \frac{1}{T}$$

und erhält

$$\frac{d^2U}{dT^2} = CU^\nu.$$

Die Transformation liefert also eine Gleichung von derselben Form wie für $\mu = 0$.

Wird endlich $\mu = \frac{1}{2}(\nu + 3)$, so führt man zwei neue Veränderliche U und T durch die Gleichungen

$$u = \gamma \tau^{\frac{1}{2}} U, \quad T = c \log \tau, \quad \gamma \text{ und } c \text{ Konstanten},$$

ein; das Ergebnis ist

$$\frac{d^2U}{dT^2} = a_1 U + \frac{1}{2}(\nu + 1) a_2 U^\nu,$$

wo

$$a_1 = \frac{1}{4c^2}, \quad a_2 = \frac{2C\gamma^{\nu-1}}{(\nu+1)\,c^2}$$

ist. Da γ und c beliebige von Null verschiedene Werte haben können, gilt dasselbe auch von den Koeffizienten a_1 und a_2. Die Funktion U von T ergibt sich durch Umkehrung des Integrals

$$\int \frac{dU}{\sqrt{a_0 + a_1 U^2 + a_2 U^{\nu+1}}} = T - T_0;$$

a_0 und T_0 sind die beiden Integrationskonstanten. Für $\nu = 2$ und $\nu = 3$ erhält man elliptische Integrale, und U wird eine eindeutige Funktion von T; aber auch im Falle $\nu = 5$ ist die Zurückführung auf ein elliptisches Integral möglich, wenn man z. B.

$$U = V^{-\frac{1}{2}}$$

setzt:

$$\int \frac{dV}{\sqrt{a_0 V^3 + a_1 V^2 + a_2}} = -2(T - T_0).$$

Es ist dann zwar V eine eindeutige Funktion von $T - T_0$, aber nicht U.

3. Es sollen im folgenden diejenigen Lösungen der Gleichung (6) oder, was auf dasselbe hinausläuft, des Systems

$$t\frac{d\xi}{dt} = \eta, \qquad t\frac{d\eta}{dt} = \eta + F(\xi) \tag{9}$$

untersucht werden, welche für $t = 0$ die Werte $\xi = \alpha_k$, $\eta = 0$ annehmen, α_k eine der Wurzeln von $F(\xi) = 0$. Es existieren für $\xi - \alpha_k$ und η konvergente Reihen, welche z. B. nach Potenzen zweier Variabeln

$$\omega_1 = \gamma_1 t^{\beta_1}, \qquad \omega_2 = \gamma_2 t^{\beta_2}$$

fortschreiten, vorausgesetzt daß β_1 und β_2 positive Größen sind. Diese Konstanten sind Wurzeln einer gewissen quadratischen Gleichung mit vorgeschriebenen Koeffizienten, während γ_1 und γ_2 willkürliche Werte haben dürfen. Die Funktionen, welche durch die Reihen dargestellt werden, verschwinden für $\omega_1 = \omega_2 = 0$, und wenn man die Veränderliche t eliminiert, erhält man eine direkte Beziehung zwischen η und $\xi - \alpha_k$, also eine Darstellung der Unbekannten η in der Umgebung der festen singulären Stelle α_k. Aber dieses Ergebnis ist keineswegs sehr übersichtlich; es ist einfacher, $\xi - \alpha_k$ und η als Funktion des Parameters t zu studieren.

Man kann dem Polynom $F(\xi)$ die folgende Gestalt geben:

$$F(\xi) = (\xi - \alpha_k) F'(\alpha_k) + G(\xi - \alpha_k).$$

$G(\xi - \alpha_k)$ ist eine ganze rationale Funktion vom Grade ν, welche für $\xi = \alpha_k$ mindestens von der zweiten Ordnung verschwindet. Wenn man

$$\xi_k = \xi - \alpha_k, \qquad \eta_k = t\,\frac{d\xi_k}{dt}$$

setzt, entsteht das System

$$t\,\frac{d\xi_k}{dt} = \eta_k, \qquad t\,\frac{d\eta_k}{dt} = \eta_k + \xi_k F'(\alpha_k) + G(\xi_k),$$

wo

$$F'(\alpha_k) = c(\alpha_k - \alpha_1)\cdots(\alpha_k - \alpha_{k-1})(\alpha_k - \alpha_{k+1})\cdots(\alpha_k - \alpha_\nu)$$

ist. Zwei neue Funktionen v_k und w_k mögen durch die Gleichungen

$$v_k = h_1\xi_k + \eta_k, \qquad w_k = h_2\xi_k + \eta_k$$

definiert und die Konstanten h_1 und h_2 so bestimmt werden, daß

$$t\,\frac{dv_k}{dt} = \beta_{k1}v_k + \varphi_{k1}(v_k, w_k), \qquad t\,\frac{dw_k}{dt} = \beta_{k2}w_k + \varphi_{k2}(v_k, w_k)$$

wird. Die Polynome φ_{k1} und φ_{k2}, welche in Bezug auf v_k und w_k vom Grade ν sind, sollen keine linearen Glieder enthalten. Wenn diese Bedingungen erfüllt sind, genügen die Koeffizienten β_{k1} und β_{k2} der quadratischen Gleichung

$$\beta_k^2 - \beta_k = F'(\alpha_k), \qquad k = 1, 2, \ldots, \nu, \tag{10}$$

und die Größen h_1 und h_2 werden aus den Formeln

$$h_1 = \beta_{k1} - 1 = -\beta_{k2}, \qquad h_2 = \beta_{k2} - 1 = -\beta_{k1}$$

berechnet. Was die Funktionen φ_{k1} und φ_{k2} betrifft, so findet man

$$\varphi_{k1} = \varphi_{k2} = G(\xi_k) = G\left(\frac{v_k - w_k}{\beta_{k1} - \beta_{k2}}\right).$$

Als Ergebnis dieser Umformung erscheint das System

$$\begin{cases} t\,\dfrac{dv_k}{dt} = \beta_{k1}v_k + G\left(\dfrac{v_k - w_k}{\beta_{k1} - \beta_{k2}}\right), \\ t\,\dfrac{dw_k}{dt} = \beta_{k2}w_k + G\left(\dfrac{v_k - w_k}{\beta_{k1} - \beta_{k2}}\right). \end{cases} \tag{11}$$

Es versteht sich von selbst, daß die Transformation nur einen Sinn hat, wenn die Wurzeln der quadratischen Gleichung (10) von einander verschieden sind; ist dies nicht der Fall, müssen andere Umformungen vorgenommen werden.

Nach bekannten Methoden[4]) lassen sich die Systeme (9) und (11) durch konvergente Reihen integrieren, die entweder nach Potenzen von

$$\omega_1 = \gamma_1 t^{\beta_{k1}}, \qquad \omega_2 = \gamma_2 t^{\beta_{k2}}$$

fortschreiten oder auch in besonderen Fällen logarithmische Glieder enthalten. Der Charakter der Integrale hängt wesentlich von der Beschaffenheit der Wurzeln der *charakteristischen Gleichung* (10) ab. Sind β_{k1} und β_{k2} reelle positive oder konjugiert komplexe Zahlen, so erhält man gewöhnliche Potenzreihen der beiden Veränderlichen ω_1 und ω_2; ist eine der beiden Wurzeln positiv, z. B. β_{k1}, die andere negativ, so kommen in den Entwickelungen, welche in der Umgebung von $t = 0$ konvergieren, nur die Potenzen von ω_1 vor; wird endlich der Quotient der Wurzeln eine positive ganze Zahl, so können Logarithmen auftreten. Damit ist das Verhalten der Integrale für hinreichend kleine Werte von t nur ganz im Allgemeinen skizziert; im Einzelnen ergeben sich für den hier betrachteten Typus von Differentialgleichungen besondere Eigentümlichkeiten.

---

[4]) J. Horn, Gewöhnliche Differentialgleichungen beliebiger Ordnung, Leipzig 1905, S. 325—330.

Zunächst sei darauf hingewiesen, daß in der Regel ν verschiedene charakteristische Gleichungen vorhanden sind und infolgedessen ν *Lösungssysteme* der Funktionen v_k und w_k bzw. ξ_k und η_k. Die Reihen für die ξ_k verschwinden, wenn $t = 0$ wird, d. h. es existieren ν Integrale der Gleichung (6), welche für $t = 0$ die Werte α_k annehmen, die nach Voraussetzung verschieden sind.

Sodann ist zu berücksichtigen, daß jedes Lösungssystem nicht durch eindeutige Funktionen dargestellt wird; es zerfällt in zahlreiche *Zweige*. Die β_{k1} und β_{k2} genügen quadratischen Gleichungen, und es ist natürlich möglich, daß diese Wurzeln reelle rationale Zahlen sind; dann würde die Anzahl der Zweige eine endliche sein. Aber im Allgemeinen sind sie irrationale oder komplexe Größen. Macht nun z. B. in den Entwickelungen nach Potenzen von ω_1 und ω_2 die Variable t Umläufe um den singulären Punkt $t = 0$, so erhält man immer neue Bestimmungen für die beiden Veränderlichen ω_1 und ω_2, also auch für die Lösungen v_k und w_k, und ihre Anzahl überschreitet jede endliche Grenze. Aus diesen Bemerkungen folgt, daß eine wesentliche Aufgabe der Integration darin besteht, den Mechanismus der Verzweigung im Einzelnen klarzustellen.

4. Wenn das Polynom $F(\xi)$ gegeben ist, ist damit auch die Gestalt der charakteristischen Gleichungen (10) festgelegt; es fragt sich, ob auch der umgekehrte Satz gilt. Es mögen also die Größen $F'(\alpha_k)$ als bekannt und $F(\xi)$ in der Form

$$F(\xi) = c_0\xi^\nu + c_1\xi^{\nu-1} + \cdots + c_{\nu-1}\xi + c_\nu, \qquad c_0 = c,$$

vorausgesetzt werden; dann sind die Koeffizienten $c_0, c_1, \ldots, c_{\nu-1}$ aus den linearen Gleichungen

$$\nu c_0\alpha_k^{\nu-1} + (\nu-1)\, c_1\alpha_k^{\nu-2} + \cdots + 2c_{\nu-2}\alpha_k + c_{\nu-1} = F'(\alpha_k), \qquad k = 1, 2, \ldots, \nu,$$

zu berechnen. Die Determinante dieses Systems ist nichts anderes als das Produkt aus den Wurzeldifferenzen, daher von Null verschieden. Die Aufgabe ist immer lösbar; allerdings bleibt der Koeffizient c_ν unbestimmt.

Es sei D die Diskriminante der Funktion $F(\xi)$. Aus der bekannten Formel

$$D = (-1)^{\frac{\nu(\nu-1)}{2}} c^{\nu-2}F'(\alpha_1)F'(\alpha_2)\cdots F'(\alpha_\nu)$$

folgt unter Berücksichtigung der Relation $\beta_{k1}\beta_{k2} = -F'(\alpha_k)$:

$$c^{\nu-2}\beta_{11}\beta_{12}\beta_{21}\beta_{22}\cdots\beta_{\nu1}\beta_{\nu2} = (-1)^{\frac{\nu(\nu+1)}{2}} D.$$

Da $D \neq 0$, kann keine der Wurzeln β_{k1}, β_{k2} verschwinden oder gleich Eins werden; letzteres ist unmöglich wegen der Beziehung $\beta_{k1} + \beta_{k2} = 1$.

Es sei D_k die Diskriminante der charakteristischen Gleichung (10). Da $D_k = 1 + 4F'(\alpha_k)$ ist, findet man leicht die Formel

$$D = (-1)^{\frac{\nu(\nu-1)}{2}} \frac{c^{\nu-2}}{2^{2\nu}} (D_1 - 1)(D_2 - 1)\cdots(D_\nu - 1).$$

Erster Sonderfall: Die Wurzeln von $F(\xi) = 0$ seien reell und $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \cdots > \alpha_\nu$. In den Gleichungen

$$D_k - 1 = 4c(\alpha_k - \alpha_1)\cdots(\alpha_k - \alpha_{k-1})(\alpha_k - \alpha_{k+1})\cdots(\alpha_k - \alpha_\nu), \qquad k = 1, 2, \ldots, \nu,$$

möge, um die Vorstellungen festzulegen, c positiv angenommen werden. Dann werden die Diskriminanten $D_1, D_3, D_5, \ldots$ größer als Eins, $D_2, D_4, D_6, \ldots$ kleiner als Eins. Die Wurzeln β_{k1} und β_{k2}, die zu den Diskriminanten mit ungeradem Index gehören, sind daher reell, und die eine ist positiv, die andere negativ. Ist dagegen der Index der Diskriminanten eine gerade Zahl, so liegen zwei Möglichkeiten vor: entweder $0 < D_{2m} < 1$;

dann sind die Wurzeln der charakteristischen Gleichung beide reell und positiv; oder $D_{2m} < 0$, d. h. diese Größen sind konjugiert komplexe Zahlen. Es wechseln also in den Lösungssystemen der v_k und w_k die Reihen, die nach Potenzen einer Variablen ω_1 fortschreiten, mit anderen ab, die beide Veränderliche ω_1 und ω_2 enthalten.

Ähnliche Überlegungen kann man anstellen, wenn die Anzahl der reellen Linearfaktoren von $F(\xi)$ kleiner als ν ist, vorausgesetzt, daß man nur die reellen Wurzeln in Betracht zieht.

Zweiter Sonderfall: Ist es möglich, daß alle charakteristischen Gleichungen übereinstimmen, so daß $F'(\alpha_1) = F'(\alpha_2) = \cdots = F'(\alpha_\nu)$ wird? In dem System linearer Gleichungen für die Koeffizienten von $F(\xi)$ war die gemeinsame Nennerdeterminante von Null verschieden; die Zählerdeterminanten von $\nu c_0, (\nu - 1)\, c_1, \ldots, 2c_{\nu-2}$ verschwinden identisch, weil sich entsprechende Elemente zweier Vertikalreihen nur um einen und denselben Faktor unterscheiden. Dagegen ist $c_{\nu-1} = F'(\alpha_1) \neq 0$. Demnach wäre die Funktion

$$F(\xi) = F'(\alpha_1)\, \xi + c_\nu, \quad c_\nu \text{ eine Konstante,}$$

vom ersten Grade. Dieser Fall ist ohne Interesse, weil sich die zugehörige lineare Differentialgleichung (6) durch elementare Funktionen integrieren läßt.

Dritter Sonderfall: Es sei

$$F(\xi) = c_0 \xi^\nu + c_{\nu-1} \xi + c_\nu, \qquad F'(\alpha_k) = \nu c_0 \alpha_k^{\nu-1} + c_{\nu-1}.$$

Von gewissen Ausnahmen abgesehen, sind die charakteristischen Gleichungen untereinander verschieden. Die Bedeutung dieses Falles liegt darin, daß sich auf ihn die Gleichung der Gaskugel zurückführen läßt, ferner die Differentialgleichung

$$\frac{d^2Y}{dX^2} = BY^m + CX^n, \; B \text{ und } C \text{ Konstanten,}$$

vorausgesetzt, daß zwischen den Exponenten m und n eine bestimmte Beziehung besteht. Setzt man nämlich

$$X = \frac{m+3}{m-1}\, t^{\frac{m-1}{m+3}}, \qquad Y = B^{-\frac{1}{m-1}} t^{-\frac{2}{m+3}} \xi,$$

so findet man für beliebige Werte von m und n, $m = 1$ und $m = -3$ ausgenommen,

$$t^2 \frac{d^2\xi}{dt^2} = \xi^m - \frac{2(m+1)}{(m+3)^2}\, \xi + CB^{\frac{1}{m-1}} \left(\frac{m+3}{m-1}\right)^n t^{\frac{n(m-1)+2m}{m+3}}.$$

Ist nun m eine positive ganze Zahl und

$$n = -\frac{2m}{m-1},$$

so wird

$$t^2 \frac{d^2\xi}{dt^2} = F(\xi), \tag{6}$$

wo

$$F(\xi) = \xi^m - \frac{2(m+1)}{(m+3)^2}\, \xi + a, \qquad a = CB^{\frac{1}{m-1}} \left(\frac{m-1}{m+3}\right)^{\frac{2m}{m-1}}$$

ist. Die bekannte von Painlevé [5]) und Boutroux [6]) untersuchte Gleichung

---

[5]) P. Painlevé, Mémoire sur les équations différentielles dont l'intégrale générale est uniforme, Bulletin de la société mathématique de France **28** (1900), p. 201—261.

[6]) P. Boutroux, Recherches sur les transcendentes de M. Painlevé, Annales scientifiques de l'école normale **30** (1913), p. 255—375; **31** (1914), p. 99—159.

$$\frac{d^2Y}{dX^2} = 6Y^2 + X$$

kommt hier nicht in Betracht, weil die Exponenten $m = 2$ und $n = 1$ der angegebenen Bedingung nicht genügen. Das ist selbstverständlich; denn die Integrale der Painlevéschen Gleichung sind eindeutige Funktionen von X, während die der Gleichung (6) einen ganz anderen Charakter haben. In der verallgemeinerten Gleichung der Gaskugeln hat $F(\xi)$ die Form

$$F(\xi) = \varkappa(\xi - \xi^\nu).$$

Die erste Wurzel α_1 wird gleich Null, für die anderen ist

$$\alpha_k^{\nu-1} = 1, \qquad k = 2, 3, \ldots, \nu.$$

Infolgedessen heißt die charakterische Gleichung für das erste Lösungssystem

$$\beta^2 - \beta = \varkappa$$

und für alle folgenden

$$\beta^2 - \beta = -\varkappa(\nu - 1).$$

Die weiteren Untersuchungen schließen sich an die Differentialgleichung (5) an, zu der die eben genannte Funktion $F(\xi)$ gehört. Die Lösungssysteme sollen durch Reihen dargestellt werden, welche in der Umgebung der singulären Stelle $t = 0$ bzw. $t = \infty$ konvergieren.

Zweites Kapitel.

Die Reihenentwickelungen des ersten Lösungssystems.

1. Das System

$$t\frac{d\xi}{dt} = \eta\,, \qquad t\frac{d\eta}{dt} = \eta + \varkappa(\xi - \xi^\nu),$$

welches der Differentialgleichung (5) äquivalent ist, geht durch die Substitution

$$v = (\beta_1 - 1)\,\xi + \eta, \qquad w = (\beta_2 - 1)\,\xi + \eta$$

in das System

$$(12) \qquad t\frac{dv}{dt} = \beta_1 v - K(v - w)^\nu, \qquad t\frac{dw}{dt} = \beta_2 w - K(v - w)^\nu$$

über, vorausgesetzt daß β_1 und β_2 aus der quadratischen Gleichung

$$(13) \qquad \beta^2 - \beta = \varkappa$$

bestimmt werden. Die Konstante K hat den Wert

$$K = \varkappa(1 + 4\varkappa)^{-\frac{\nu}{2}}.$$

Sind die unbekannten Funktionen v und w gefunden, so wird

$$\xi = \frac{v - w}{\beta_1 - \beta_2}, \qquad \eta = \frac{\beta_1 v - \beta_2 w}{\beta_1 - \beta_2}.$$

Es versteht sich von selbst, daß β_1 nicht gleich β_2 sein darf. Man erhält für diese Größen, sowie für K eine zweckmäßigere Darstellung, wenn man mittels der Formel (8) den Koeffizienten $\varkappa$ durch die Exponenten μ und ν in Gleichung (7) ersetzt. Die beiden Wurzeln von (13) lassen sich dann rational durch μ und ν ausdrücken:

$$(14) \qquad \beta_1 = \frac{\mu - 2}{2\mu - \nu - 3}, \qquad \beta_2 = \frac{\mu - \nu - 1}{2\mu - \nu - 3}.$$

Es ist schon an einer früheren Stelle darauf hingewiesen worden, daß die Werte $\mu = 2$, $\mu = \nu + 1$, $\mu = \frac{1}{2}(\nu + 3)$ ausgeschlossen bleiben; im übrigen sollen in diesem Kapitel noch folgende Beschränkungen hinzukommen: Es sei ν eine positive ganze Zahl größer als Eins und μ rational; daraus folgt, daß β_1 und β_2 ebenfalls rationale Zahlen sind. Dasselbe gilt für den Koeffizienten

$$K = -\frac{(\mu - 2)(\mu - \nu - 1)\,(2\mu - \nu - 3)^{\nu-2}}{(\nu - 1)^{\nu}}.$$

Man sieht nun, daß die Annahme $\beta_1 = \beta_2$ unmöglich ist; denn in diesem Falle wäre $\nu = 1$. Bemerkenswert ist ferner, daß komplexe Wurzeln von (13) nicht in Betracht zu ziehen sind.

Von dem Werte des Exponenten μ hängt die Beschaffenheit der Wurzeln der charakteristischen Gleichung und damit die Natur der Reihenentwickelungen wesentlich ab. Es handelt sich um drei Hauptintervalle

$$\mu > \nu + 1, \qquad 2 < \mu < \nu + 1, \qquad \mu < 2,$$

welche der Reihe nach mit $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{B}$ bezeichnet werden mögen.

Intervall $\mathfrak{C}$: $2 < \mu < \nu + 1$.

Da $\mu - 2 > 0$, $\mu - \nu - 1 < 0$ ist, wird das Produkt

$$\beta_1\beta_2 = \frac{(\mu - 2)(\mu - \nu - 1)}{(2\mu - \nu - 3)^2}$$

negativ, also die eine Wurzel positiv, die andere negativ. Man zerlegt $\mathfrak{C}$ in zwei Teilintervalle:

Intervall $\mathfrak{C}_1$: $\frac{1}{2}(\nu + 3) < \mu < \nu + 1$. Es ist $2\mu - \nu - 3 > 0$, folglich

$$\beta_1 > 0, \qquad \beta_2 < 0.$$

Intervall $\mathfrak{C}_2$: $2 < \mu < \frac{1}{2}(\nu + 3)$. Daraus folgt $2\mu - \nu - 3 < 0$,

$$\beta_1 < 0, \qquad \beta_2 > 0.$$

Intervall $\mathfrak{A}$: $\mu > \nu + 1$.

Das Produkt $\beta_1\beta_2$ ist positiv; folglich sind beide Wurzeln der charakterischen Gleichung gleichfalls positiv; denn negativ können sie nicht werden wegen der Bedingung $\beta_1 + \beta_2 = 1$. Da $2\mu - \nu - 3 > 0$ ist, ergibt sich aus

$$\beta_1 - \beta_2 = \frac{\nu - 1}{2\mu - \nu - 3},$$

daß $\beta_1 > \beta_2$ ist.

Für die Reihenentwickelungen sind diejenigen Fälle von Bedeutung, in denen der Quotient $\frac{\beta_1}{\beta_2}$ eine positive ganze Zahl $g > 1$ wird. Aus der Relation

$$\frac{\mu - 2}{\mu - \nu - 1} = g$$

folgt

$$\mu = \nu + 1 + \frac{\nu - 1}{g - 1}, \qquad \nu > 1, \qquad g > 1.$$

Dem Werte $g = 2$ entspricht $\mu = 2\nu$, und für $g = \infty$ erhält man $\mu = \nu + 1$. Man kann daher das Intervall $\mathfrak{A}$ in zwei andere, $\mathfrak{A}_2$ und $\mathfrak{A}_1$, einteilen:

Im Intervall $\mathfrak{A}_2$, $\nu + 1 < \mu \leqq 2\nu$, liegen diejenigen Werte von μ, für welche $\frac{\beta_1}{\beta_2} = g > 1$ ist.

Im Intervall $\mathfrak{A}_1$, $\mu > 2\nu$, ist der Quotient $\frac{\beta_1}{\beta_2}$ niemals eine positive ganze Zahl größer als Eins.

Intervall $\mathfrak{B}$: $\mu < 2$.

Beide Wurzeln der charakteristischen Gleichung sind positiv, und da die Ungleichung $2\mu - \nu - 3 < 0$ besteht, wird $\beta_1 < \beta_2$. Von Wichtigkeit sind wiederum diejenigen Fälle, für welche $\frac{\beta_2}{\beta_1}$ eine positive ganze Zahl $g > 1$ ist. Aus der Gleichung

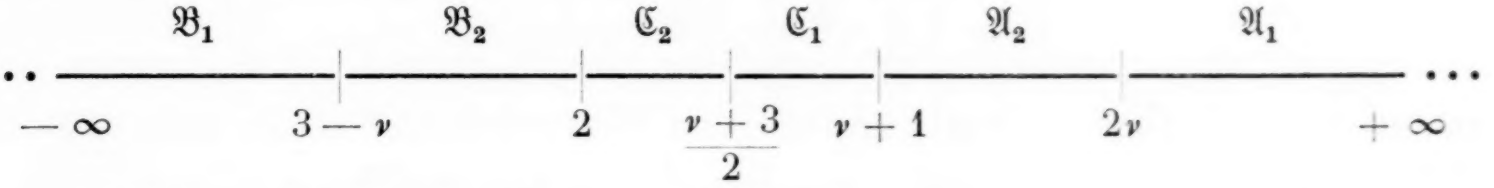
$$\frac{\mu - \nu - 1}{\mu - 2} = g$$

ergibt sich

$$\mu = 2 - \frac{\nu - 1}{g - 1}, \qquad \nu > 1, \qquad g > 1.$$

Den Werten $g = 2$ und $g = \infty$ entsprechen $\mu = 3 - \nu$ und $\mu = 2$. Das Intervall $\mathfrak{B}$ wird in zwei andere zerlegt:

Im Intervall $\mathfrak{B}_2$, $3 - \nu \leqq \mu < 2$, kann $\frac{\beta_2}{\beta_1} = g > 1$ werden. Der Bereich $\mathfrak{B}_1$, $\mu < 3 - \nu$, ist dagegen frei von solchen Werten. Eine Übersicht über die gegenseitige Lage sämtlicher Bereiche soll das folgende Schema geben:



Gaskugeln. Es sind zwei Fälle zu unterscheiden: $\mu = \nu - 1$ und $\mu = 4$.

Erster Fall: $\mu = \nu - 1$. Die Bereiche $\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_1$ kommen nicht in Betracht; zu berücksichtigen sind $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ und $\mathfrak{B}_2$.

Intervall $\mathfrak{C}_1$: $\nu > 5$, $\mu = \nu - 1$;

$$\beta_1 = \frac{\nu - 3}{\nu - 5} > 0, \quad \beta_2 = -\frac{2}{\nu - 5} < 0.$$

Intervall $\mathfrak{C}_2$: $\nu = 4$, $\mu = 3$;

$$\beta_1 = -1, \quad \beta_2 = +2.$$

Intervall $\mathfrak{B}_2$: $\nu = 2$, $\mu = 1$;

$$\beta_1 = +\frac{1}{3}, \quad \beta_2 = +\frac{2}{3}; \quad \frac{\beta_2}{\beta_1} = g = 2.$$

Zweiter Fall: $\mu = 4$. Dieser Wert von μ kann nur in den Bereichen $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ und $\mathfrak{A}_2$ liegen.

Intervall $\mathfrak{C}_1$: $\nu = 4$, $\mu = 4$;

$$\beta_1 = +2, \quad \beta_2 = -1.$$

Intervall $\mathfrak{C}_2$: $\nu > 5$, $\mu = 4$;

$$\beta_1 = -\frac{2}{\nu - 5} < 0, \quad \beta_2 = \frac{\nu - 3}{\nu - 5} > 0.$$

Intervall $\mathfrak{A}_2$: $\nu = 2$, $\mu = 4$;

$$\beta_1 = +\frac{2}{3}, \quad \beta_2 = +\frac{1}{3}; \quad \frac{\beta_1}{\beta_2} = g = 2.$$

2. Unter der Voraussetzung, daß μ einem der Bereiche $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{B}$ angehört, aber unter Ausschluß der besonderen Werte, für welche der Quotient der Wurzeln der charakteristischen Gleichung eine positive ganze Zahl ist, geht (12) in das System

$$\begin{aligned} \beta_1\omega_1\frac{\partial v}{\partial\omega_1}+\beta_2\omega_2\frac{\partial v}{\partial\omega_2}&=\beta_1 v-K(v-w)^\nu,\\ \beta_1\omega_1\frac{\partial w}{\partial\omega_1}+\beta_2\omega_2\frac{\partial w}{\partial\omega_2}&=\beta_2 w-K(v-w)^\nu \end{aligned} \tag{15}$$

über, wo $\omega_1=\gamma_1 t^{\beta_1}$, $\omega_2=\gamma_2 t^{\beta_2}$ gesetzt wurde und γ_1, γ_2 willkürliche Konstanten sind. Es sollen für v und w Reihen aufgestellt werden, die nach Potenzen von ω_1 und ω_2 mit positiven ganzen Exponenten fortschreiten und die für $\omega_1=\omega_2=0$ verschwinden. Es erscheint zweckmäßig, alle Glieder gleicher Dimension zusammenzufassen, also nach homogenen Funktionen wachsenden Grades zu entwickeln; dabei stellt sich heraus, daß nicht sämtliche Funktionen vorkommen, daß vielmehr eine Anzahl derselben ausgelassen werden muß. Es sei

$$v=\sum_{k=0}^{\infty}A_{k\nu-k+1},\qquad w=\sum_{k=0}^{\infty}B_{k\nu-k+1}. \tag{16}$$

Der Index gibt den Grad der Funktionen an. A_1 und B_1 berechnet man aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} \beta_1\omega_1\frac{\partial A_1}{\partial\omega_1}+\beta_2\omega_2\frac{\partial A_1}{\partial\omega_2}-\beta_1 A_1&=0,\\ \beta_1\omega_1\frac{\partial B_1}{\partial\omega_1}+\beta_2\omega_2\frac{\partial B_1}{\partial\omega_2}-\beta_2 B_1&=0, \end{aligned}$$

woraus $A_1=\omega_1$, $B_1=\omega_2$ folgt. Willkürliche Konstanten sind schon in ω_1 und ω_2 enthalten.

Die Entwickelung von $(v-w)^\nu$ beginnt mit einer Funktion vom Grade ν:

$$v-w=\sum_{k=0}^{\infty}E_{k\nu-k+1},\qquad E_{k\nu-k+1}=A_{k\nu-k+1}-B_{k\nu-k+1};\qquad (v-w)^\nu=\sum_{k=1}^{\infty}P_{k\nu-k+1}.$$

Es ist notwendig, die P mit höherem Index durch die P und E mit niedrigerem Index auszudrücken. Eine leichte, etwas umständliche Rechnung liefert die folgende Rekursionsformel für $k=1,2,3,\ldots$:

$$kE_1P_{(k+1)\nu-k}=\sum_{\lambda=0}^{k-1}[(k-\lambda)\,\nu-\lambda]\,E_{(k-\lambda)\nu-k+\lambda+1}P_{(\lambda+1)\nu-\lambda},\qquad k\geqq 1, \tag{17}$$

also z. B.

$$\begin{aligned} E_1P_{2\nu-1}&=\nu E_\nu P_\nu,\\ 2E_1P_{3\nu-2}&=2\nu E_{2\nu-1}P_\nu+(\nu-1)\,E_\nu P_{2\nu-1},\\ 3E_1P_{4\nu-3}&=3\nu E_{3\nu-2}P_\nu+(2\nu-1)\,E_{2\nu-1}P_{2\nu-1}+(\nu-2)\,E_\nu P_{3\nu-2},\\ &\text{u. s. w.} \end{aligned}$$

P_ν muß auf eine andere Art bestimmt werden; es ist $P_\nu=E_1^\nu=(\omega_1-\omega_2)^\nu$. Wenn man die Reihen für v, w, $(v-w)^\nu$ in das System (15) einsetzt, erhält man Differentialgleichungen für die homogenen Funktionen A_m und B_m, $m=k\nu-k+1$:

$$\begin{aligned} \beta_1\omega_1\frac{\partial A_m}{\partial\omega_1}+\beta_2\omega_2\frac{\partial A_m}{\partial\omega_2}-\beta_1 A_m&=-KP_m,\\ \beta_1\omega_1\frac{\partial B_m}{\partial\omega_1}+\beta_2\omega_2\frac{\partial B_m}{\partial\omega_2}-\beta_2 B_m&=-KP_m. \end{aligned} \tag{18}$$

Es sei $k = 1$; in dem System (18) treten dann die Funktionen A_ν, B_ν und $P_\nu = (\omega_1 - \omega_2)^\nu$ auf. Man setze

$$A_\nu = \sum_{\lambda=0}^{\nu} a_{\nu-\lambda,\lambda}\omega_1^{\nu-\lambda}\omega_2^{\lambda}, \qquad B_\nu = \sum_{\lambda=0}^{\nu} b_{\nu-\lambda,\lambda}\omega_1^{\nu-\lambda}\omega_2^{\lambda}.$$

Die Koeffizienten $a_{\nu-\lambda,\lambda}$, $b_{\nu-\lambda,\lambda}$ ermittelt man aus den Formeln

$$\left.\begin{aligned} a_{\nu-\lambda,\lambda} &= \frac{(-1)^\lambda\, \nu_\lambda(\mu-2)(\mu-\nu-1)(2\mu-\nu-3)^{\nu-1}}{(\mu-\lambda-2)(\nu-1)^{\nu+1}} \\ b_{\nu-\lambda,\lambda} &= \frac{(-1)^\lambda\, \nu_\lambda(\mu-2)(\mu-\nu-1)(2\mu-\nu-3)^{\nu-1}}{(\mu-\lambda-1)(\nu-1)^{\nu+1}} \end{aligned}\right\} \lambda = 0, 1, 2, \ldots, \nu.$$

ν_λ ist eine Abkürzung für den Binomialfaktor $\frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)\ldots(\nu-\lambda+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\lambda}$. Allgemein wird

$$A_m = \sum_{\lambda=0}^{m} a_{m-\lambda,\lambda}\omega_1^{m-\lambda}\omega_2^{\lambda}, \qquad P_m = \sum_{\lambda=0}^{m} p_{m-\lambda,\lambda}\omega_1^{m-\lambda}\omega_2^{\lambda},$$

$$B_m = \sum_{\lambda=0}^{m} b_{m-\lambda,\lambda}\omega_1^{m-\lambda}\omega_2^{\lambda}, \qquad m = k\nu - k + 1.$$

Wenn man die Rekursionsformeln (17) berücksichtigt, kann man sagen, daß die Koeffizienten $p_{m-\lambda,\lambda}$ durch die vorangehenden Rechnungen bekannt geworden sind. Die Differentialgleichungen (18) geben dann die Möglichkeit, die $a_{m-\lambda,\lambda}$, $b_{m-\lambda,\lambda}$ durch die $p_{m-\lambda,\lambda}$ auszudrücken. Es sei

$$h = \frac{(\mu-2)(\mu-\nu-1)(2\mu-\nu-3)^{\nu-1}}{(\nu-1)^{\nu+1}}. \tag{19}$$

Das Ergebnis ist

$$a_{m-\lambda,\lambda} = \frac{hp_{m-\lambda,\lambda}}{k(\mu-2)-\lambda}, \qquad b_{m-\lambda,\lambda} = \frac{hp_{m-\lambda,\lambda}}{k(\mu-2)-\lambda+1}, \qquad m = k\nu - k + 1.$$

Es soll noch eine andere Integrationsmethode mitgeteilt werden, welche sich auf die Tatsache stützt, daß die hier in Betracht kommenden Funktionen homogen sind. Stellt man mit der ersten Gleichung (18) eine bekannte Eulersche Formel zusammen, so hat man das System

$$\begin{aligned} \beta_1\omega_1\frac{\partial A_m}{\partial\omega_1} + \beta_2\omega_2\frac{\partial A_m}{\partial\omega_2} &= \beta_1 A_m - KP_m, \\ \omega_1\frac{\partial A_m}{\partial\omega_1} + \quad \omega_2\frac{\partial A_m}{\partial\omega_2} &= mA_m, \qquad m = k\nu - k + 1, \end{aligned}$$

aus dem durch Elimination der einzelnen Ableitungen die Gleichungen

$$\begin{aligned} \omega_1\frac{\partial A_m}{\partial\omega_1} + m_1 A_m - hP_m &= 0, \\ \omega_2\frac{\partial A_m}{\partial\omega_2} - m_2 A_m + hP_m &= 0 \end{aligned} \tag{20}$$

hervorgehen. Die Konstante h ist durch den Ausdruck (19) gegeben; für m_1 und m_2 findet man die Werte

$$m_1 = \frac{m\beta_2 - \beta_1}{\beta_1 - \beta_2} = k(\mu - \nu - 1) - 1, \qquad m_2 = \frac{(m-1)\beta_1}{\beta_1 - \beta_2} = k(\mu - 2).$$

Das Integral erscheint in der Form

$$A_m = h\omega_1^{-m_1}\int_0^{\omega_1} P_m\omega_1^{m_1-1}d\omega_1 = -h\omega_2^{m_2}\int_0^{\omega_2} P_m\omega_2^{-m_2-1}d\omega_2.$$

Das ist natürlich nicht die allgemeinste Lösung des Systems (20), sondern diejenige, welche keine Potenzen von ω_1 und ω_2 mit negativen Exponenten enthält, wie sich aus einer genaueren Diskussion des Vorzeichens der Größen m_1 und m_2 ergeben würde. — Für die homogene Funktion B_m lassen sich ähnliche Ausdrücke aufstellen.

3. Im Intervall $\mathfrak{C}$, $2 < \mu < \nu + 1$, war eine der beiden Wurzeln der charakteristischen Gleichung positiv, die andere negativ. Es sollen partikuläre Lösungen gefunden werden, die in der Umgebung von $t = 0$ nach Potenzen einer der beiden Variabeln $\omega_1 = \gamma_1 t^{\beta_1}$ bzw. $\omega_2 = \gamma_2 t^{\beta_2}$ fortschreiten. Wenn $\beta_1 > 0$ ist, erhält man aus (12) das System

$$(21)\qquad \beta_1\omega_1\frac{dv}{d\omega_1} = \beta_1 v - K(v-w)^\nu, \qquad \beta_1\omega_1\frac{dw}{d\omega_1} = \beta_2 w - K(v-w)^\nu;$$

ist dagegen $\beta_2 > 0$, so wird

$$(21\,a)\qquad \beta_2\omega_2\frac{dv}{d\omega_2} = \beta_1 v - K(v-w)^\nu, \qquad \beta_2\omega_2\frac{dw}{d\omega_2} = \beta_2 w - K(v-w)^\nu.$$

Intervall $\mathfrak{C}_1$, $\frac{1}{2}(\nu+3) < \mu < \nu + 1$: Den Differentialgleichungen (21) genügen Reihen von der Form

$$(22)\qquad v = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k\nu-k+1}\omega_1^{k\nu-k+1}, \qquad w = \sum_{k=0}^{\infty} b_{k\nu-k+1}\omega_1^{k\nu-k+1},$$

und es ist $a_1 = 1$, $b_1 = 0$. Um die übrigen Koeffizienten zu berechnen, muß man $(v-w)^\nu$ entwickeln. Es sei

$$v - w = \sum_{k=0}^{\infty} e_{k\nu-k+1}\omega_1^{k\nu-k+1}, \qquad e_{k\nu-k+1} = a_{k\nu-k+1} - b_{k\nu-k+1},$$

$$(v-w)^\nu = \sum_{k=1}^{\infty} q_{k\nu-k+1}\omega_1^{k\nu-k+1}, \qquad q_\nu = e_1^\nu = 1.$$

Die Faktoren q mit höherem Index lassen sich durch die e und q mit niederem Index ausdrücken; die Rekursionsformel heißt:

$$(23)\qquad ke_1 q_{(k+1)\nu-k} = \sum_{\lambda=0}^{k-1}[(k-\lambda)\nu - \lambda]\, e_{(k-\lambda)\nu-k+\lambda+1} q_{(\lambda+1)\nu-\lambda}, \qquad k \geqq 1.$$

Man setzt die Reihen für v, w, $(v-w)^\nu$ in das System (21) ein und erhält

$$(24)\qquad \begin{aligned} a_{k\nu-k+1} &= \frac{(\mu-\nu-1)(2\mu-\nu-3)^{\nu-1}}{k(\nu-1)^{\nu+1}}\, q_{k\nu-k+1}, \\ b_{k\nu-k+1} &= \frac{(\mu-2)(\mu-\nu-1)(2\mu-\nu-3)^{\nu-1}}{[k(\mu-2)+1](\nu-1)^{\nu+1}}\, q_{k\nu-k+1}, \qquad k > 0. \end{aligned}$$

Der Quotient $\frac{a_{k\nu-k+1}}{b_{k\nu-k+1}} = 1 + \frac{1}{k(\mu-2)}$ liegt zwischen zwei positiven Grenzen; da nämlich nach Voraussetzung $\frac{1}{2}(\nu+3) < \mu < \nu+1$ ist, wird auch

$$\frac{2}{\nu-1} > \frac{1}{\mu-2} > \frac{1}{\nu-1},$$

und daraus folgt

$$1 + \frac{2}{k(\nu-1)} > \frac{a_{k\nu-k+1}}{b_{k\nu-k+1}} > 1 + \frac{1}{k(\nu-1)}.$$

Die beiden Koeffizienten haben daher dasselbe Zeichen, und der absolute Betrag von $a_{k\nu-k+1}$ ist größer als der von $b_{k\nu-k+1}$. Wenn k über jede Grenze hinaus wächst, nähert sich der Quotient dem Werte Eins.

Die Größen $e_{k\nu-k+1} = a_{k\nu-k+1} - b_{k\nu-k+1}$ kann man aus der Formel

$$e_{k\nu-k+1} = \frac{(\mu-\nu-1)(2\mu-\nu-3)^{\nu-1}}{k[k(\mu-2)+1](\nu-1)^{\nu+1}}\, q_{k\nu-k+1} \tag{25}$$

berechnen. Substituiert man die entsprechenden Ausdrücke in (23), so entsteht eine Rekursionsformel, welche nur die Koeffizienten q enthält. — Es sollen noch die Werte für $a_\nu, b_\nu, a_{2\nu-1}, b_{2\nu-1}$ angegeben werden:

$$a_\nu = \frac{(\mu-\nu-1)(2\mu-\nu-3)^{\nu-1}}{(\nu-1)^{\nu+1}}, \qquad b_\nu = \frac{(\mu-2)(\mu-\nu-1)(2\mu-\nu-3)^{\nu-1}}{(\mu-1)(\nu-1)^{\nu+1}},$$

$$a_{2\nu-1} = \frac{\nu(\mu-\nu-1)^2(2\mu-\nu-3)^{2(\nu-1)}}{2(\mu-1)(\nu-1)^{2(\nu+1)}}, \qquad b_{2\nu-1} = \frac{\nu(\mu-2)(\mu-\nu-1)^2(2\mu-\nu-3)^{2(\nu-1)}}{(\mu-1)(2\mu-3)(\nu-1)^{2(\nu+1)}}.$$

Es sei noch auf ein Bedenken hingewiesen. Ist es nicht möglich, daß in den Brüchen für $a_{k\nu-k+1}$ und $b_{k\nu-k+1}$ einer der Nenner verschwindet? Da $k > 0$ und $\nu > 1$ ist, könnte es sich nur um $k(\mu-2)+1 = 0$ handeln. Das würde bedeuten, daß $\mu = 2 - \frac{1}{k}$ kleiner als 2 wäre, also dem Bereiche $\mathfrak{B}$ angehörte, was der Voraussetzung widerspricht.

Intervall $\mathfrak{C}_2$, $2 < \mu < \frac{1}{2}(\nu+3)$: Die Differentialgleichungen (21 a) mit der Veränderlichen ω_2 werden wiederum durch Reihen von der Form (22) befriedigt; jedoch ist $a_1 = 0$, $b_1 = 1$, also $e_1 = -1$, $q_\nu = (-1)^\nu$. Die Rekursionsformel (23) behält ihre Gültigkeit. Die Koeffizienten haben die Werte

$$a_{k\nu-k+1} = \frac{(\mu-2)(\mu-\nu-1)(2\mu-\nu-3)^{\nu-1}}{[k(\mu-\nu-1)-1](\nu-1)^{\nu+1}}\, q_{k\nu-k+1},$$

$$b_{k\nu-k+1} = \frac{(\mu-2)(2\mu-\nu-3)^{\nu-1}}{k(\nu-1)^{\nu+1}}\, q_{k\nu-k+1}, \qquad k > 0. \tag{24 a}$$

Keiner der Nenner verschwindet; den Quotienten $\frac{b_{k\nu-k+1}}{a_{k\nu-k+1}} = 1 + \frac{1}{k(\nu+1-\mu)}$ kann man zwischen positiven Grenzen einschließen. Denn wegen der Ungleichung, die das Intervall $\mathfrak{C}_2$ charakterisiert, ist

$$\frac{2}{\nu-1} > \frac{1}{\nu+1-\mu} > \frac{1}{\nu-1},$$

folglich

$$1 + \frac{2}{k(\nu-1)} > \frac{b_{k\nu-k+1}}{a_{k\nu-k+1}} > 1 + \frac{1}{k(\nu-1)}.$$

Das ist dieselbe Ungleichung, welche bereits in dem anderen Intervall auftrat; nur sind die beiden Koeffizienten miteinander vertauscht. Diese letzteren haben daher dasselbe Zeichen, und der absolute Betrag von $b_{k\nu-k+1}$ ist größer als der von $a_{k\nu-k+1}$. Wenn k unbegrenzt zunimmt, nähert sich der Quotient dem Werte Eins. Die in der Rekursionsformel vorkommende Größe $e_{k\nu-k+1} = a_{k\nu-k+1} - b_{k\nu-k+1}$ wird

$$e_{k\nu-k+1} = \frac{(\mu-2)(2\mu-\nu-3)^{\nu-1}}{k[k(\mu-\nu-1)-1](\nu-1)^{\nu+1}}\, q_{k\nu-k+1}; \tag{25 a}$$

ferner hat man

$$a_\nu = (-1)^\nu \frac{(\mu-2)(\mu-\nu-1)(2\mu-\nu-3)^{\nu-1}}{(\mu-\nu-2)(\nu-1)^{\nu+1}}, \qquad b_\nu = (-1)^\nu \frac{(\mu-2)(2\mu-\nu-3)^{\nu-1}}{(\nu-1)^{\nu+1}},$$

$$a_{2\nu-1} = -\frac{\nu(\mu-2)^2(\mu-\nu-1)(2\mu-\nu-3)^{2(\nu-1)}}{(\mu-\nu-2)(2\mu-2\nu-3)(\nu-1)^{2(\nu+1)}}, \qquad b_{2\nu-1} = -\frac{\nu(\mu-2)^2(2\mu-\nu-3)^{2(\nu-1)}}{2(\mu-\nu-2)(\nu-1)^{2(\nu+1)}}.$$

Die hier angegebenen Formeln genügen, um in beiden Intervallen sämtliche Koeffizienten zu berechnen. Man kann natürlich auch die Größen e und q eliminieren und erhält dann direkte Rekursionsgleichungen allein für die a- bzw. b-Koeffizienten. Das soll weiter unten in den Fällen $\mu = \nu - 1$ und $\mu = 4$ geschehen.

Gaskugeln.

Erster Fall: $\mu = \nu - 1, \quad \nu > 5, \quad \beta_1 = \dfrac{\nu - 3}{\nu - 5}, \quad \beta_2 = -\dfrac{2}{\nu - 5}, \quad \omega_1 = \gamma_1 t^{\beta_1}.$

Reihen:
$$v = \omega_1 + a_\nu \omega_1^\nu + a_{2\nu-1}\omega_1^{2\nu-1} + \cdots,$$
$$w = \quad b_\nu \omega_1^\nu + b_{2\nu-1}\omega_1^{2\nu-1} + \cdots.$$

Rekursionsformeln:

$$k(k+1)\, a_{(k+1)\nu-k} = \sum_{\lambda=0}^{k-1} \frac{[(k-\lambda)\,\nu - \lambda]\,(\lambda+1)}{(k-\lambda)(\nu-3)+1}\, a_{(k-\lambda)\nu-k+\lambda+1} a_{(\lambda+1)\nu-\lambda}, \qquad k > 0,$$

$$k[(k+1)(\nu-3)+1]\, b_{(k+1)\nu-k} = \frac{1}{\nu-3} \sum_{\lambda=0}^{k-1} \frac{[(k-\lambda)\,\nu - \lambda][(\lambda+1)(\nu-3)+1]}{k-\lambda}\, b_{(k-\lambda)\nu-k+\lambda+1} b_{(\lambda+1)\nu-\lambda}.$$

Spezielle Werte: $a_\nu = -\dfrac{2(\nu-5)^{\nu-1}}{(\nu-1)^{\nu+1}}, \qquad b_\nu = -\dfrac{2(\nu-3)(\nu-5)^{\nu-1}}{(\nu-2)(\nu-1)^{\nu+1}},$

$$a_{2\nu-1} = \frac{2\nu(\nu-5)^{2(\nu-1)}}{(\nu-2)(\nu-1)^{2(\nu+1)}}, \quad b_{2\nu-1} = \frac{4\nu(\nu-3)(\nu-5)^{2(\nu-1)}}{(\nu-2)(2\nu-5)(\nu-1)^{2(\nu+1)}}.$$

Zweiter Fall: $\mu = 3, \quad \nu = 4, \quad \beta_1 = -1, \quad \beta_2 = +2, \quad \omega_2 = \gamma_2 t^2.$

Reihen:
$$v = \quad a_4\omega_2^4 + a_7\omega_2^7 + \cdots,$$
$$w = \omega_2 + b_4\omega_2^4 + b_7\omega_2^7 + \cdots.$$

Rekursionsformeln:

$$a_{3k+4} = \frac{1}{2k(2k+3)} \sum_{\lambda=0}^{k-1} \frac{(4k-5\lambda)(2\lambda+3)}{k-\lambda}\, a_{3k-3\lambda+1} a_{3\lambda+4}, \qquad k > 0,$$

$$b_{3k+4} = \frac{1}{k(k+1)} \sum_{\lambda=0}^{k-1} \frac{(4k-5\lambda)(\lambda+1)}{2k-2\lambda+1}\, b_{3k-3\lambda+1} b_{3\lambda+4}.$$

Spezielle Werte: $a_4 = -\dfrac{2}{3^6}, \quad b_4 = -\dfrac{1}{3^5}, \quad a_7 = \dfrac{2^3}{3^{11}\cdot 5}, \quad b_7 = \dfrac{2}{3^{11}}.$

Wie man sieht, nehmen die absoluten Beträge der Koeffizienten schnell ab.

Dritter Fall: $\mu = 4, \quad \nu = 4, \quad \beta_1 = +2, \quad \beta_2 = -1, \quad \omega_1 = \gamma_1 t^2.$

Es ergeben sich dieselben Rekursionsformeln und Reihen wie im zweiten Falle, vorausgesetzt daß man die b- mit den a-Koeffizienten und die Funktionen v und w vertauscht.

Vierter Fall: $\mu = 4, \quad \nu > 5, \quad \beta_1 = -\dfrac{2}{\nu-5}; \quad \beta_2 = \dfrac{\nu-3}{\nu-5}, \quad \omega_2 = \gamma_2 t^{\beta_2}.$

Die Reihen, welche nach Potenzen von ω_2 fortschreiten, stimmen, wenn man wieder dieselbe Vertauschung vornimmt, mit den Ergebnissen des ersten Falles überein.

Durch diese Untersuchungen ist im Intervall $\mathfrak{C}$ das Verhalten der Funktionen v und w in der Umgebung der singulären Stelle $t = 0$ klargestellt. Es ist möglich, daß es sich um eindeutige Funktionen handelt, wenn nämlich die Exponenten β_1 bzw. β_2 ganze Zahlen sind; aber im Allgemeinen hat man es mit vieldeutigen Funktionen zu tun, deren Zweige in endlicher Anzahl auftreten. Auf einen anderen Umstand sei noch hingewiesen.

Die angegebenen Reihen sind nur partikuläre Lösungen der Differentialgleichungen, weil in ihnen eine einzige willkürliche Konstante vorkommt. Selbstverständlich müssen im Intervall $\mathfrak{C}$ auch allgemeine Integrale existieren; diese werden jedoch durch die hier benutzte Methode nicht erhalten.

Man kann auch Reihen aufstellen, welche in der Umgebung von $t = \infty$ konvergieren; man braucht in (12) nur $t = \frac{1}{t'}$ zu setzen und gelangt zu ähnlichen Ergebnissen wie die zuletzt gefundenen.

4. Bemerkenswert sind die Werte des Exponenten μ, für welche der Quotient der Wurzeln der charakteristischen Gleichung eine positive ganze Zahl $g > 1$ ist. Sie erstrecken sich über die Intervalle $\mathfrak{A}_2$ und $\mathfrak{B}_2$, erfüllen sie aber nicht lückenlos.

Es sei zunächst $\frac{\beta_2}{\beta_1} = g$, also $\beta_1 = \frac{1}{g+1}$, $\beta_2 = \frac{g}{g+1}$. Durch die Substitution

$$v = -g\xi + (g+1)\eta, \qquad w = g\xi + (g+1)\eta, \qquad \omega = t^{\beta_1}$$

gehen die am Anfang dieses Kapitels angegebenen Differentialgleichungen

$$t\frac{d\xi}{dt} = \eta, \qquad t\frac{d\eta}{dt} = \eta + \varkappa(\xi - \xi^g)$$

unter Berücksichtigung der Relation $\varkappa = -\beta_1\beta_2$ in das System

$$(26)\qquad \begin{aligned} \omega\frac{dv}{d\omega} &= v + \frac{1}{2^g g^{g-1}}(w-v)^g, \\ \omega\frac{dw}{d\omega} &= gw + (g+1)\,v + \frac{1}{2^g g^{g-1}}(w-v)^g \end{aligned}$$

über. Die weiteren Transformationen, welche sich auf die unbekannte Funktion w beziehen, verfolgen das Ziel, Gleichungen von der Form

$$(27)\qquad \begin{aligned} \omega\frac{dv}{d\omega} &= v + \chi_1(v,z), \\ \omega\frac{dz}{d\omega} &= z + \varepsilon v + \chi_2(v,z) \end{aligned}$$

zu erhalten, wo ε eine Konstante ist, und in den Polynomen χ_1 und χ_2 Glieder von geringerer als der zweiten Dimension fehlen. Die Berechnung des Koeffizienten ε ist von Bedeutung. Ist er gleich Null, so erhält man für die allgemeinen Lösungen gewöhnliche Potenzreihen, anderenfalls treten Logarithmen auf.

Wenn man mit φ eine noch zu bestimmende Funktion von v bezeichnet und

$$w = v^{g-1}z + v\varphi$$

setzt, entsteht aus (26) das neue System

$$(28)\qquad \begin{aligned} \omega\frac{dv}{d\omega} &= v + \frac{v^g}{2^g g^{g-1}}\left[v^{g-2}z + (\varphi - 1)\right]^g \\ \omega\frac{dz}{d\omega} &= z + M - N. \end{aligned}$$

Die Ausdrücke

$$M = v^{-(g-2)}\left[(g-1)\,\varphi + (g+1) - v\frac{d\varphi}{dv}\right]$$

$$N = \frac{v^{g-g+1}}{2^g g^{g-1}}\left[v^{g-2}z + (\varphi - 1)\right]^g \cdot \left[(g-1)\,v^{g-2}z + v\frac{d\varphi}{dv} + (\varphi - 1)\right]$$

enthalten im allgemeinen Potenzen von v mit negativen Exponenten, sowie konstante Glieder. Man muß nun die Funktion φ so wählen, daß sich in der Differenz $M - N$ alle diese „Hauptglieder" gegenseitig zerstören und nur lineare Glieder und solche höherer Dimension übrig bleiben. Zunächst sei φ eine ganze rationale Funktion von v.

Löst man in N die von z abhängigen Glieder heraus, so ist dasjenige niedrigster Dimension $v^{g-2}z$, welches mit $v^{\nu-g+1}$ zu multiplizieren ist. Das Produkt $v^{\nu-1}z$ ist wegen $\nu > 1$ mindestens von der zweiten Dimension. Man braucht daher in N nur den Teil

$$N_* = \frac{v^{\nu-g+1}}{2^\nu g^{\nu-1}} (\varphi - 1)^\nu \left[v \frac{d\varphi}{dv} + (\varphi - 1) \right]$$

zu betrachten. Es sei nun

$$\varphi = -\frac{g+1}{g-1} - v^{\nu-1}\psi, \qquad \varphi - 1 = -\frac{2g}{g-1} - v^{\nu-1}\psi$$

und ψ eine ganze rationale Funktion von v, welche für $v = 0$ nicht verschwindet. Dann wird, wenn man zur Abkürzung

$$\Phi = v \frac{d\psi}{dv} - (g - \nu)\ \psi,$$

$$\Psi = v \frac{d\psi}{dv} + \nu\psi$$

schreibt,

$$M = v^{\nu-g+1}\Phi, \qquad N_* = -\frac{v^{\nu-g+1}}{2^\nu g^{\nu-1}} (\varphi - 1)^\nu \left(\frac{2g}{g-1} + v^{\nu-1}\Psi \right).$$

Man entwickelt $(\varphi - 1)^\nu = (-1)^\nu \left(\frac{2g}{g-1} + v^{\nu-1}\psi \right)^\nu$ und ordnet N_* nach Potenzen von $v^{\nu-1}$:

$$N_* = (-1)^{\nu+1} \frac{v^{\nu-g+1}}{2^\nu g^{\nu-1}} \sum_{\lambda=0}^{\nu+1} \left(\frac{2g}{g-1} \right)^{\nu-\lambda+1} (\nu_\lambda \psi^\lambda + \nu_{\lambda-1}\psi^{\lambda-1}\Psi)\ v^{\lambda(\nu-1)}.$$

Hierin ist $\nu_\lambda = \frac{\nu(\nu-1)\cdots(\nu-\lambda+1)}{1 \cdot 2 \cdots \lambda}$, $\nu_{-1} = \nu_{\nu+1} = 0$. An dieser Stelle muß man eine bestimmte Voraussetzung über die Grenzen machen, zwischen denen die ganze Zahl g liegen soll; es sei

$$(29) \qquad (k-1)(\nu-1) + 2 \leqq g \leqq k(\nu-1) + 1, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots.$$

Dann wird sich zeigen, daß es genügt, die ganze rationale Funktion ψ in der Form

$$(30) \qquad \psi = a_0 + a_1 v^{\nu-1} + a_2 v^{2(\nu-1)} + \cdots + a_{k-2} v^{(k-2)(\nu-1)}$$

anzunehmen, wenn $k > 1$ ist; für $k = 1$ sei $\psi = 0$. Die Koeffizienten a_n kann man so wählen, daß sich in $M - N_*$ sämtliche Hauptglieder gegenseitig aufheben. Durch Einsetzen des Ausdruckes (30) in Φ findet man zunächst

$$M = -v^{\nu-g+1} \sum_{\lambda=0}^{k-2} [g - (\lambda+1)(\nu-1) - 1]\, a_\lambda v^{\lambda(\nu-1)}.$$

Aus der Ungleichung $g \geqq (k-1)(\nu-1) + 2$ folgt, daß alle Exponenten in M negativ oder höchstens gleich Null sind; diese Funktion enthält also nur Hauptglieder. Da es aber in $M - N_*$ nicht allein auf diese letzteren sondern auch auf den Koeffizienten des linearen Gliedes ankommt, so fragt es sich, ob man nicht in ψ einen weiteren Summanden $a_{k-1}v^{(k-1)(\nu-1)}$ mitnehmen muß. Das entsprechende Glied in M hieße

$$-[g - k(\nu-1) - 1]\, a_{k-1} v^{k(\nu-1)+2-g}.$$

Ist nun $g = k(\nu-1) + 1$, so wäre allerdings der Exponent gleich Eins, aber der Koeffi-

zient würde identisch verschwinden; ist dagegen $g < k(\nu - 1) + 1$, so wäre der Exponent größer als Eins; das betreffende Glied müßte daher in die Funktion χ_2 der Gleichungen (27) aufgenommen werden. Das ist der Grund, weshalb der Grad von ψ gleich $(k-2)(\nu-1)$ vorausgesetzt wurde.

Der Ausdruck für N_* enthält die Potenzen von ψ. Es sei

$$\psi^\lambda = b_{0\lambda} + b_{1,\lambda} v^{\nu-1} + b_{2,\lambda} v^{2(\nu-1)} + \cdots + b_{p,\lambda} v^{p(\nu-1)}, \qquad p = \lambda(k-2).$$

Die Koeffizienten $b_{m,\lambda}$ lassen sich aus den $a_0, a_1, \ldots, a_{k-2}$ durch Rekursionsformeln berechnen. Dann wird, wenn $\lambda > 0$ ist,

$$\nu_\lambda \psi^\lambda + \nu_{\lambda-1} \psi^{\lambda-1} \Psi = c_{0,\lambda} + c_{1,\lambda} v^{\nu-1} + c_{2,\lambda} v^{2(\nu-1)} + \cdots + c_{p,\lambda} v^{p(\nu-1)};$$

für $\lambda = 0$ reduziert sich dieses Polynom auf den Wert Eins. Die Faktoren $c_{m,\lambda}$ sind den $b_{m,\lambda}$ proportional,

$$c_{m,\lambda} = [(\lambda + m + 1)(\nu - 1) + 2] \frac{1}{\lambda} \nu_{\lambda-1} b_{m,\lambda}, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots, p.$$

Man gelangt nunmehr zu folgender Entwickelung von N_*:

$$\begin{aligned} N_* = (-1)^{\nu+1} \frac{v^{\nu-g+1}}{2^\nu g^{\nu-1}} \Bigg\{ & \left(\frac{2g}{g-1}\right)^{\nu+1} \\ & + \left(\frac{2g}{g-1}\right)^{\nu} c_{01} v^{\nu-1} \\ & + \left[\left(\frac{2g}{g-1}\right)^{\nu} c_{11} + \left(\frac{2g}{g-1}\right)^{\nu-1} c_{02}\right] v^{2(\nu-1)} \\ & + \left[\left(\frac{2g}{g-1}\right)^{\nu} c_{21} + \left(\frac{2g}{g-1}\right)^{\nu-1} c_{12} + \left(\frac{2g}{g-1}\right)^{\nu-2} c_{03}\right] v^{3(\nu-1)} \\ & + \left[\left(\frac{2g}{g-1}\right)^{\nu} c_{31} + \left(\frac{2g}{g-1}\right)^{\nu-1} c_{22} + \left(\frac{2g}{g-1}\right)^{\nu-2} c_{13} + \left(\frac{2g}{g-1}\right)^{\nu-3} c_{04}\right] v^{4(\nu-1)} \\ & + \cdots\cdots\cdots\

handen ist. Der Ausdruck von N_* enthält nämlich in der Klammer, die mit $v^{\nu-g+1}$ multipliziert wird, Potenzen von der Form $v^{\lambda(\nu-1)}$, $\lambda = 0, 1, 2, \ldots$. Wenn $\nu - g + 1 + \lambda(\nu-1) = 1$ sein soll, wird $g = (\lambda+1)(\nu-1)+1$. Andererseits war auf Grund der Ungleichungen (29)

$$(k-1)(\nu-1)+2 \leqq g \leqq k(\nu-1)+1, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots.$$

Daraus folgt

$$k-2+\frac{1}{\nu-1} \leqq \lambda \leqq k-1,$$

und da λ, ν und k positive ganze Zahlen waren, $\nu > 1$, muß $\lambda = k-1$, $g = k(\nu-1)+1$ werden. Ist dagegen $g < k(\nu-1)+1$, so wird $\lambda < k-1$; aber in diesen Fällen sind die zugehörigen Exponenten in N_* negativ oder höchstens gleich Null. Das Ergebnis dieser Überlegungen ist der Satz: Der Koeffizient ε des linearen Gliedes verschwindet, wenn

$$(k-1)(\nu-1)+2 \leqq g < k(\nu-1)+1$$

ist; er verschwindet nicht für $g = k(\nu-1)+1$.

Wenn $k > 1$ ist, gibt N_* den Wert ε in der Form

$$(32) \qquad \varepsilon = (-1)^\nu \frac{k(\nu-1)+2}{2^\nu g^{\nu-1}} \sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{2g}{g-1}\right)^{\nu+1-i} \frac{1}{i}\, v_{i-1} b_{k-1-i,i};$$

für $k = 1$ findet man $\varepsilon = (-1)^\nu \dfrac{2\nu^2}{(\nu-1)^{\nu+1}}$. — Die Formeln (31) und (32) für die Koeffizienten a_n und ε können als die endgültige Lösung des Transformationsproblems gelten; denn die Größen $b_{n-i,i}$, welche rechts auftreten, sind durch vorangehende Rechnungen ermittelt worden.

Ist $\varepsilon = 0$, so existieren für die Funktionen v und z, welche aus den Systemen (27) bzw. (28) bestimmt werden, logarithmenfreie Entwickelungen nach Potenzen von $\omega_1 = \gamma_1 t^{\beta_1}$ und $\omega_2 = \gamma_2 t^{\beta_2}$, γ_1 und γ_2 willkürliche Konstanten. Hierzu gehört auch der besondere Fall $\mu = 0$, der im ersten Kapitel auf eine einfachere Art behandelt wurde. Man hat nämlich

$$\beta_1 = \frac{2}{\nu+3}, \qquad \beta_2 = \frac{\nu+1}{\nu+3}, \qquad \frac{\beta_2}{\beta_1} = \frac{\nu+1}{2}, \qquad \nu > 1.$$

Der Quotient ist eine positive ganze Zahl $g > 1$, wenn $\nu = 2g-1$, also eine ungerade Zahl ist, und da $g < \nu$ ist, kommt die Ungleichung

$$(k-1)(\nu-1)+2 \leqq g < k(\nu-1)+1, \quad \text{für} \quad k = 1$$

in Betracht. Letztere war aber die Bedingung für das Verschwinden des Koeffizienten ε. Dieses Ergebnis ist selbstverständlich; denn die Umkehrungsfunktion des Integrals

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^{\nu+1} - c^{\nu+1}}} = \sqrt{\frac{2C}{\nu+1}}\,(\tau - \tau_0),$$

kann, wie man leicht sieht, keine Logarithmen enthalten[7]).

Es sei $g = k(\nu-1)+1$, also $\varepsilon \neq 0$. Man definiert zwei neue Veränderliche durch die Gleichungen

$$\omega_1 = \gamma_1 \omega, \qquad \omega_2 = -\gamma_1 \omega \log \omega + \gamma_2 \omega.$$

---

[7]) Vgl. hierzu: H. Lemke, Über eine Klasse von Differentialgleichungen erster Ordnung, dieses Journal **180** (1939), S. 179 ff.

Aus (27) ergibt sich das System

$$\omega_1 \frac{\partial v}{\partial \omega_1} + (\omega_2 - \omega_1) \frac{\partial v}{\partial \omega_2} = \quad v + \chi_1(v, z),$$

$$\omega_1 \frac{\partial z}{\partial \omega_1} + (\omega_2 - \omega_1) \frac{\partial z}{\partial \omega_2} = z + \varepsilon v + \chi_2(v, z),$$

welches durch Reihen von der Form

$$v = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} a_{ih} \omega_1^i \omega_2^h, \qquad z = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} b_{ih} \omega_1^i \omega_2^h, \qquad i + h \geqq 1,$$

befriedigt wird. In dem einfachen Falle $k = 1$, $g = \nu$ hat man zunächst in (26) die Transformation $w = v^{\nu-1} z - v \dfrac{\nu + 1}{\nu - 1}$ auszuführen und findet

$$\omega_1 \frac{\partial v}{\partial \omega_1} + (\omega_2 - \omega_1) \frac{\partial v}{\partial \omega_2} = v + \frac{(-1)^\nu v^\nu}{2^\nu \nu^{\nu-1}} \left(\frac{2\nu}{\nu - 1} - v^{\nu-2} z \right)^\nu,$$

$$\omega_1 \frac{\partial z}{\partial \omega_1} + (\omega_2 - \omega_1) \frac{\partial z}{\partial \omega_2} = z + \frac{(-1)^\nu v}{2^\nu \nu^{\nu-1}} \left(\frac{2\nu}{\nu - 1} - v^{\nu-2} z \right)^\nu \left[\frac{2\nu}{\nu - 1} - (\nu - 1)\, v^{\nu-2} z \right];$$

und wenn man in der zweiten Gleichung das lineare Glied in Bezug auf v herausnimmt, wird

$$\chi_1 = (-1)^\nu \frac{v^\nu}{2^\nu \nu^{\nu-1}} \left(\frac{2\nu}{\nu - 1} - v^{\nu-2} z \right)^\nu,$$

$$\chi_2 = (-1)^{\nu-1} \frac{v}{2^\nu \nu^{\nu-1}} \left\{ (2\nu - 1) \left(\frac{2\nu}{\nu - 1} \right)^\nu (v^{\nu-2} z) - \frac{1}{2} \nu_1 (3\nu - 3) \left(\frac{2\nu}{\nu - 1} \right)^{\nu-1} (v^{\nu-2} z)^2 \right.$$
$$\left. + \frac{1}{3} \nu_2 (4\nu - 5) \left(\frac{2\nu}{\nu - 1} \right)^{\nu-2} (v^{\nu-2} z)^3 - \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \right\},$$

$$\varepsilon = (-1)^\nu \frac{2\nu^2}{(\nu - 1)^{\nu+1}}.$$

Auch wenn $k > 1$ ist, bietet die Bestimmung der beiden Funktionen χ_1 und χ_2 keine erheblichen Schwierigkeiten.

Es sollen nun noch die Werte für die ersten Koeffizienten in der Entwickelung

$$v = a_{10}\omega_1 + a_{01}\omega_2 + a_{20}\omega_1^2 + a_{11}\omega_1\omega_2 + a_{02}\omega_2^2 + \cdots,$$

$$z = b_{10}\omega_1 + b_{01}\omega_2 + b_{20}\omega_1^2 + b_{11}\omega_1\omega_2 + b_{02}\omega_2^2 + \cdots$$

angegeben werden. Ist $\nu > 2$, so erhält man

$$a_{10} = 1, \qquad a_{01} = a_{20} = a_{11} = a_{02} = 0,$$

$$b_{10} = 1, \qquad b_{01} = -\varepsilon, \qquad b_{20} = b_{11} = b_{02} = 0.$$

Der Fall $\nu = 2$, $\varepsilon = 8$ erfordert eine besondere Berechnung; es wird

$$a_{10} = 1, \qquad a_{01} = 0, \qquad a_{20} = 2, \qquad a_{11} = a_{02} = 0,$$

$$b_{10} = 1, \qquad b_{01} = -8, \qquad b_{20} = 58, \qquad b_{11} = 48, \qquad b_{02} = 0.$$

Gaskugeln. Der Fall $g = \nu = 2$ ist der einzige, den man berücksichtigen muß, wenn man voraussetzt, daß

$$\frac{\beta_2}{\beta_1} = g > 1, \qquad \mu = \nu - 1$$

ist. Aus $\dfrac{\beta_2}{\beta_1} = g$ folgt nämlich, wie früher bewiesen wurde,

$$\mu = 2 - \frac{\nu - 1}{g - 1}.$$

Die Elimination von μ gibt die Relation

$$\nu = 3 - \frac{2}{g},$$

welche für ganze Zahlen, größer als Eins, nur dann erfüllt ist, wenn $g = \nu = 2$ wird. Die zugehörigen Reihenentwicklungen für v und z schreiten nach Potenzen von

$$\omega_1 = \gamma_1 t^{\frac{1}{3}}, \qquad \omega_2 = t^{\frac{1}{3}}\left(\gamma_2 - \frac{1}{3}\gamma_1 \log t\right)$$

fort. Die Koeffizienten der Glieder erster und zweiter Dimension wurden bereits mitgeteilt. —

Alle diese Untersuchungen beruhen auf der Annahme, daß $\frac{\beta_2}{\beta_1} = g > 1$ ist. Wenn man umgekehrt $\frac{\beta_1}{\beta_2} = g$, also $\beta_2 = \frac{1}{g+1}$, $\beta_1 = \frac{g}{g+1}$ voraussetzt, bleiben sämtliche Transformationen ungeändert; nur muß man $\omega = t^{\beta_2}$ setzen. Die Gleichung der Gaskugeln mit ihren logarithmischen Entwickelungen erscheint wieder für $g = \nu = 2$, aber μ hat den Wert 4.

Drittes Kapitel.

Die Reihenentwickelungen der Lösungssysteme, welche zu der charakteristischen Gleichung $\beta^2 - \beta = -\varkappa(\nu - 1)$ gehören.

1. Die Wurzeln der Gleichung $\xi^{\nu-1} = 1$ werden mit α_k, $k = 2, 3, \ldots, \nu$, bezeichnet. In der Umgebung von $\xi = \alpha_k$ entwickelt man

$$F(\xi) = \varkappa(\xi - \xi^\nu) = -\varkappa(\nu - 1)(\xi - \alpha_k) - \varkappa \sum_{h=2}^{\nu} \nu_h \alpha_k^{\nu-h}(\xi - \alpha_k)^h.$$

Unter Benutzung derselben Transformationen, die das System (9) in (11) verwandeln, erhält man, wenn $\beta_1 \neq \beta_2$ ist,

$$(33) \qquad t\frac{dv_k}{dt} = \beta_1 v_k - H(v_k, w_k), \qquad t\frac{dw_k}{dt} = \beta_2 w_k - H(v_k, w_k),$$

wo

$$H(v_k, w_k) = \varkappa \sum_{h=2}^{\nu} \frac{\nu_h \alpha_k^{\nu-h}}{(\beta_1 - \beta_2)^h}(v_k - w_k)^h$$

ist; β_1 und β_2 genügen der charakteristischen Gleichung

$$(34) \qquad \beta^2 - \beta = -\varkappa(\nu - 1).$$

Hat man v_k und w_k aus (33) ermittelt, so findet man die zugehörigen Funktionen ξ und η aus

$$\xi - \alpha_k = \frac{v_k - w_k}{\beta_1 - \beta_2}, \qquad \eta = \frac{\beta_1 v_k - \beta_2 w_k}{\beta_1 - \beta_2}.$$

Der wesentliche Unterschied gegenüber dem ersten Lösungssystem besteht darin, daß β_1 und β_2 *im allgemeinen* keine rationalen Größen sind, auch dann nicht, wenn μ diese Eigenschaft besitzt.

Da sich auf Grund der Gleichung (8) $\varkappa$ durch μ und ν darstellen läßt, gilt dasselbe auch von der Diskriminante D der quadratischen Gleichung (34),

$$(35) \qquad D = 1 + \frac{4(\mu - 2)(\mu - \nu - 1)(\nu - 1)}{(2\mu - \nu - 3)^2} = \nu - \frac{(\nu - 1)^3}{(2\mu - \nu - 3)^2}.$$

Es sei wieder ν eine positive ganze Zahl größer als Eins und μ reell, rational oder irrational; dann ist zunächst $D < \nu$. Bezeichnet man

$$\mu_1 = \frac{1}{2}\left[\nu + 3 + \frac{(\nu-1)^{\frac{3}{2}}}{\nu^{\frac{1}{2}}}\right], \qquad \mu_2 = \frac{1}{2}\left[\nu + 3 - \frac{(\nu-1)^{\frac{3}{2}}}{\nu^{\frac{1}{2}}}\right],$$

so wird

$$D = \frac{4\nu}{(2\mu - \nu - 3)^2}(\mu - \mu_1)(\mu - \mu_2), \tag{36}$$

und es ist $\mu_1 > \mu_2$. Von dem Werte des Exponenten μ hängt die Natur der Wurzeln β_1 und β_2 der charakteristischen Gleichung ab; es kommen drei Hauptintervalle in Betracht,

$$\mu > \mu_1, \qquad \mu_2 < \mu < \mu_1, \qquad \mu < \mu_2,$$

welche $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{C}'$ und $\mathfrak{B}'$ heißen sollen. Ihre Grenzen decken sich nicht mit denen der Bereiche $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{B}$, welche bei der Besprechung des ersten Lösungssystems auftraten. Man findet leicht folgende Ungleichungen, die die gegenseitige Lage erkennen lassen:

$$2 < \mu_2 < \frac{1}{2}(\nu + 3) < \mu_1 < \nu + 1.$$

Bemerkenswert sind die Werte $\mu = \mu_1$ und $\mu = \mu_2$, für welche die Diskriminante verschwindet und $\beta_1 = \beta_2$ wird. Diese irrationalen Größen trennen die Bereiche $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{C}'$ und $\mathfrak{B}'$ von einander. Die zugehörigen Reihenentwicklungen enthalten stets Logarithmen. Es ist das ein Fall, der im ersten Lösungssystem kein Analogon hat.

Intervall $\mathfrak{C}'$: $\mu_2 < \mu < \mu_1$.

Die Diskriminante ist negativ und die Wurzeln β_1 und β_2 sind konjugiert komplexe Größen mit dem reellen Teil $+\frac{1}{2}$.

Intervall $\mathfrak{A}'$: $\mu > \mu_1$.

Da $D > 0$ ist, sind beide Wurzeln reell. Man zerlegt $\mathfrak{A}'$ in zwei Teilintervalle:

Intervall $\mathfrak{A}_1'$: $\mu > \nu + 1$. Aus der Relation

$$\beta_1\beta_2 = -\frac{(\mu-2)(\mu-\nu-1)(\nu-1)}{(2\mu-\nu-3)^2}$$

ergibt sich, daß β_1 und β_2 entgegengesetzte Zeichen haben.

Intervall $\mathfrak{A}_2'$: $\mu_1 < \mu < \nu + 1$. Beide Wurzeln sind positiv.

Intervall $\mathfrak{B}'$: $\mu < \mu_2$.

Die Verhältnisse liegen ähnlich wie im Bereiche $\mathfrak{A}'$. Man nimmt wieder eine Zerlegung vor.

Intervall $\mathfrak{B}_1'$: $\mu < 2$. Die eine Wurzel ist positiv, die andere negativ.

Intervall $\mathfrak{B}_2'$: $2 < \mu < \mu_2$. β_1 und β_2 haben positive Werte. —

Es soll nun der Fall untersucht werden, daß der Quotient $\frac{\beta_1}{\beta_2}$ eine positive ganze Zahl $g \geqq 1$ ist. Die Annahme $g = 1$ ist oben bereits erledigt worden. β_1 sei die größere der beiden Wurzeln, also

$$\beta_1 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{D}), \qquad \beta_2 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{D}).$$

Zunächst wird $\beta_2 = \frac{1}{g+1}$, $\beta_1 = \frac{g}{g+1}$ und die Diskriminante, welche zu diesen speziellen Werten gehört,

$$D_* = \left(\frac{g-1}{g+1}\right)^2.$$

Aus (35) folgt ganz allgemein

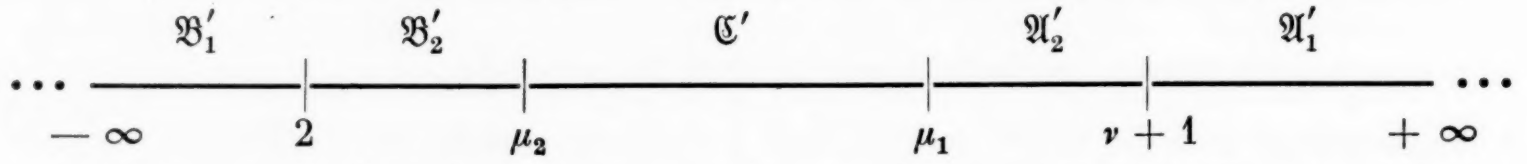
$$\mu = \frac{1}{2}(\nu + 3) \pm \frac{1}{2}\frac{(\nu - 1)^{\frac{3}{2}}}{(\nu - D)^{\frac{1}{2}}}.$$

Setzt man voraus, daß $\beta_1 = \beta_2 g$ ist, so wird $D = D_*$, und für μ findet man

$$\mu_* = \frac{1}{2}(\nu + 3) \pm \frac{1}{2}\frac{(\nu - 1)^{\frac{3}{2}}}{(\nu - D_*)^{\frac{1}{2}}}.$$

Die ganze Zahl g möge nacheinander die Werte $1, 2, \cdots \infty$ und D_* die Werte $0, \frac{1}{3^2}, \ldots, 1$ durchlaufen; dann entstehen für μ_* zwei Reihen irrationaler Zahlen, von denen die erste mit μ_1 beginnt und mit $\nu + 1$ endet, also dem Bereiche $\mathfrak{A}_2'$ angehört, während die zweite sich über das Intervall $\mathfrak{B}_2'$ erstreckt, welches von μ_2 bis 2 reicht.

Eine Übersicht über die gegenseitige Lage der Intervalle gibt das folgende Schema:



Gaskugeln. Es sind die beiden Fälle $\mu = \nu - 1$ und $\mu = 4$ zu unterscheiden.

Erster Fall: $\mu = \nu - 1$. Die Relation (35) liefert einen Ausdruck für die Diskriminante, welcher nur von ν abhängt,

$$D = -\frac{1}{(\nu - 5)^2}(7\nu^2 - 22\nu - 1).$$

Wenn $\nu = 2$ ist, wird $D = \frac{17}{9}$ positiv. Von den Wurzeln der charakteristischen Gleichung ist die eine $\beta_1 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{3}\sqrt{17}\right)$ positiv, die andere $\beta_2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\sqrt{17}\right)$ negativ. Da $\mu = 1$ ist, kommt das Intervall $\mathfrak{B}_1'$ in Frage.

Die Werte $\nu = 3$ und $\nu = 5$ sind auszuschließen; die Gründe wurden an einer früheren Stelle angegeben.

Wenn $\nu = 4$ ist, wird $D = -23$, und dasselbe Vorzeichen findet man für $\nu > 5$. Die Wurzeln sind konjugiert komplex; Intervall $\mathfrak{C}'$.

Zweiter Fall: $\mu = 4$. Für die Diskriminante D besteht derselbe Ausdruck wie im ersten Falle. Von den Intervallen sind $\mathfrak{A}_1'$ und $\mathfrak{C}'$ zu berücksichtigen, je nachdem $\nu = 2$ oder $\nu > 3$ ist; die Werte $\nu = 3$ und $\nu = 5$ kommen nicht in Betracht. Wenn $\nu = 2$ ist, sind die Wurzeln β_1, β_2 reell und $\beta_1 > 0$, $\beta_2 < 0$. Ist jedoch $\nu > 3$, so erhält man konjugiert komplexe Werte.

In beiden Fällen spielen die Bereiche $\mathfrak{A}_2'$ und $\mathfrak{B}_2'$ keine Rolle; es scheiden daher auch die Werte von μ aus, für die der Quotient der Wurzeln eine positive ganze Zahl ist.

2. Bei der Untersuchung des ersten Lösungssystems wurde vorausgesetzt, daß μ eine rationale Zahl ist, woraus sich ergab, daß die Wurzeln der zugehörigen charakteristischen Gleichung dieselbe Eigenschaft besitzen, da ja ν eine positive ganze Zahl größer als Eins sein sollte. Die Reihen, welche in der Umgebung von $t = 0$ nach Potenzen von

$$\omega_1 = \gamma_1 t^{\beta_1} \quad \text{und} \quad \omega_2 = \gamma_2 t^{\beta_2}$$

fortschreiten, erscheinen daselbst als vieldeutige Funktionen mit einer *endlichen* Anzahl von Zweigen. Diese Voraussetzungen genügen aber nicht, um ähnliche Eigenschaften auch für die anderen Lösungssysteme zu sichern. Im allgemeinen sind die Wurzeln ihrer charakteristischen Gleichung irrationale Größen, und es müssen zu den oben angegebenen neue Bedingungen hinzutreten, um auch hier den rationalen Charakter der

Wurzeln zu verbürgen. Die Sache ist vom funktionentheoretischen Standpunkte aus nicht ohne Bedeutung. Wenn es nämlich gelingt, für besondere Werte von μ und ν die Wurzeln *beider* charakteristischen Gleichungen rational zu machen, so ist damit ein Weg gewiesen, Lösungen der Differentialgleichung zu finden, für die die gesamte Anzahl aller Zweige in der Umgebung von $t = 0$ eine endliche ist.

Da die Diskriminante der Gleichung (34) in die Form

$$1 - 4\varkappa(\nu - 1) = \frac{(\nu-1)^2 + 4\nu(\mu-2)(\mu-\nu-1)}{(2\mu-\nu-3)^2}$$

gebracht werden kann, muß der Zähler dieses Bruchs das Quadrat einer rationalen Zahl sein,

$$4\nu(\mu-2)(\mu-\nu-1) + (\nu-1)^2 = \frac{m^2}{n^2}.$$

Aus dieser Gleichung, welche sich auch folgendermaßen schreiben läßt,

$$(37) \qquad (2\mu-\nu-3)^2 = \frac{(\nu-1)^3 n^2 + m^2}{\nu n^2},$$

sollen sich für μ gleichfalls rationale Werte ergeben; es sind daher die ganzen Zahlen $\nu > 1, m, n$ so zu bestimmen, daß

$$(\nu-1)^3 n^2 + m^2 = \nu l^2,$$

ist, wo mit l eine rationale Zahl bezeichnet wird. Setzt man nun

$$x = \frac{n}{l}, \qquad y = \frac{m}{l},$$

so stellt

$$(\nu-1)^3 x^2 + y^2 = \nu$$

die Gleichung einer Ellipse dar, und die vorliegende Aufgabe besteht darin, auf dieser Kurve die rationalen Punkte zu bestimmen. Ein solcher ist P_1 mit den Koordinaten $x_1 = \frac{1}{\nu-1}$, $y_1 = 1$; man legt durch ihn einen Strahl

$$y = \varrho x + 1 - \frac{\varrho}{\nu-1},$$

dessen Richtungsfaktor ϱ einen rationalen Wert haben soll, und berechnet die Koordinaten x und y des anderen Schnittpunktes. Das Ergebnis ist

$$x = \frac{\varrho^2 - 2\varrho(\nu-1) - (\nu-1)^3}{(\nu-1)[\varrho^2 + (\nu-1)^3]}, \qquad y = -\frac{\varrho^2 + 2\varrho(\nu-1)^2 - (\nu-1)^3}{\varrho^2 + (\nu-1)^3}.$$

Hieraus ergibt sich eine Darstellung von $\frac{m^2}{n^2} = \frac{y^2}{x^2}$, welche man in (37) einzusetzen hat. Man erhält also μ als Funktion von ϱ und ν:

$$(38) \qquad 2\mu = \nu + 3 \pm \frac{(\nu-1)[\varrho^2 + (\nu-1)^3]}{\varrho^2 - 2\varrho(\nu-1) - (\nu-1)^3}.$$

Wenn ϱ rational ist, gilt dasselbe auch für μ; aber dieser Satz läßt sich nicht umkehren; man darf daher für μ nicht beliebige rationale Zahlen wählen, sondern nur solche, welche der Gleichung (38) genügen.

An einer früheren Stelle wurde darauf hingewiesen, daß der Koeffizient $\varkappa$, welcher mittels der Relation (8) aus μ und ν berechnet werden konnte, von Null verschieden sein muß. Nun findet man, wenn man (38) benutzt,

$$\varkappa = -\frac{\varrho(\varrho - \nu + 1)\,[\varrho + (\nu-1)^2]\,(\nu-1)}{[\varrho^2 + (\nu-1)^3]^2}.$$

Daraus folgt, daß für ϱ die Werte $0,\ \nu-1,\ -(\nu-1)^2$ ausgeschlossen bleiben. Von Interesse sind ferner die Diskriminanten der beiden charakteristischen Gleichungen:

$$1 + 4\varkappa = \left[\frac{\varrho^2 - 2\varrho(\nu-1) - (\nu-1)^3}{\varrho^2 + (\nu-1)^3}\right]^2, \quad 1 - 4\varkappa(\nu-1) = \left[\frac{\varrho^2 + 2\varrho(\nu-1)^2 - (\nu-1)^3}{\varrho^2 + (\nu-1)^3}\right]^2.$$

Da für das erste Lösungssystem $\beta_1 - \beta_2 \neq 0$ ist, muß ϱ so gewählt werden, daß auch

$$\varrho^2 - 2\varrho(\nu-1) - (\nu-1)^3 \neq 0$$

wird. Für die anderen Lösungssysteme kann zwar im allgemeinen $\beta_1 = \beta_2$ werden, aber nicht in diesem besonderen Zusammenhange; denn die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$\varrho^2 + 2\varrho(\nu-1)^2 - (\nu-1)^3 = 0$$

sind, wenn ν eine positive ganze Zahl größer als Eins ist, stets irrational.

Es bleibt nun noch übrig, die Ausdrücke für die Wurzeln der beiden charakteristischen Gleichungen anzugeben. Im ersten Lösungssystem ist

$$(39\,a) \qquad \beta_{11} = \frac{\varrho(\varrho - \nu + 1)}{\varrho^2 + (\nu-1)^3}, \qquad \beta_{12} = \frac{(\nu-1)\,[\varrho + (\nu-1)^2]}{\varrho^2 + (\nu-1)^3};$$

dagegen im zweiten und in den folgenden

$$(39\,b) \qquad \beta_{21} = \frac{\varrho[\varrho + (\nu-1)^2]}{\varrho^2 + (\nu-1)^3}, \qquad \beta_{22} = -\frac{(\nu-1)^2(\varrho - \nu + 1)}{\varrho^2 + (\nu-1)^3}.$$

Vom Vorzeichen dieser rationalen Brüche hängt die Natur der Reihenentwickelungen ab; aus diesem Grunde erscheint es zweckmäßig, für ϱ gewisse Intervalle einzuführen, in denen die Vorzeichen der vier Wurzeln $\beta_{i,k}$ bestehen bleiben.

Intervall $\mathfrak{E}$:	$\varrho > \nu - 1.$	$\beta_{11} > 0,$	$\beta_{12} > 0;$	$\beta_{21} > 0,$	$\beta_{22} < 0.$
„ $\mathfrak{F}$:	$\nu - 1 > \varrho > 0.$	$\beta_{11} < 0,$	$\beta_{12} > 0;$	$\beta_{21} > 0,$	$\beta_{22} > 0.$
„ $\mathfrak{G}$:	$0 > \varrho > -(\nu-1)^2.$	$\beta_{11} > 0,$	$\beta_{12} > 0;$	$\beta_{21} < 0,$	$\beta_{22} > 0.$
„ $\mathfrak{H}$:	$-(\nu-1)^2 > \varrho.$	$\beta_{11} > 0,$	$\beta_{12} < 0;$	$\beta_{21} > 0,$	$\beta_{22} > 0.$

Das Ziel der Untersuchungen dieses Abschnitts bestand darin, Werte von μ zu finden, für welche die Gesamtanzahl der Zweige aller Lösungssysteme in der Umgebung von $t = 0$ eine endliche ist. Die Ergebnisse sind nicht vollständig; denn sie berücksichtigen nicht, daß die Lösungen unter Umständen auch Logarithmen enthalten können. Diese Fälle, welche ausgeschlossen werden müssen, kommen in Frage, wenn der Quotient der Wurzeln der charakteristischen Gleichung eine positive ganze Zahl ist.

Für das erste Lösungssystem sei entweder $\frac{\beta_{11}}{\beta_{12}}$ oder $\frac{\beta_{12}}{\beta_{11}}$ gleich g, wo g, wie früher bewiesen wurde, die Form $k\nu - k + 1$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, hat. In beiden Fällen ergeben sich aus (39 a) für ϱ quadratische Gleichungen, nämlich entweder

$$\varrho^2 - \varrho(g+1)(\nu-1) - g(\nu-1)^3 = 0 \quad \text{oder} \quad \varrho^2 - \frac{\varrho(g+1)(\nu-1)}{g} - \frac{(\nu-1)^3}{g} = 0,$$

deren Wurzeln nur dann rational sind, wenn man die ganzen Zahlen $k > 0$, $\nu > 1$ so bestimmen kann, daß der Ausdruck

$$(g+1)^2 + 4g(\nu-1) = k^2(\nu-1)^2 + 4k(\nu-1)\,\nu + 4\nu$$

das Quadrat einer ganzen Zahl ist. Sollten derartige Werte existieren, so ist das zugehörige μ, das man aus (38) berechnet, auszuschließen.

In den folgenden Lösungssystemen hat man die Quotienten $\frac{\beta_{21}}{\beta_{22}} = g$ bzw. $\frac{\beta_{22}}{\beta_{21}} = g$ zu betrachten, und g ist, wie später gezeigt wird, irgendeine positive ganze Zahl. Für ϱ findet man aus (39 b) die quadratischen Gleichungen

$$\varrho^2 + \varrho(g+1)(\nu-1)^2 - g(\nu-1)^3 = 0 \quad \text{bzw.} \quad \varrho^2 + \frac{\varrho(g+1)(\nu-1)^2}{g} - \frac{(\nu-1)^3}{g} = 0.$$

Wenn ϱ und damit μ rational sein soll, muß

$$(g+1)^2(\nu-1)^2 + 4g(\nu-1)$$

das Quadrat einer ganzen Zahl sein. Eine genauere Diskussion würde zu dem Ergebnis führen, daß es unmöglich ist, ganze Zahlen $g > 0$, $\nu > 1$ zu bestimmen, welche dieser Bedingung genügen.

Die Gleichung der *Gaskugeln* gehört dem hier untersuchten Typus nicht an. Man kann sich davon überzeugen, wenn man $\mu = \nu - 1$ oder $\mu = 4$ in die Relation (38) einsetzt. Man erhält für ϱ wiederum quadratische Gleichungen; aber die Koeffizienten sind diesmal rationale Funktionen von ν allein. Bei der Auflösung nach ϱ erscheint in allen Fällen unter dem Wurzelzeichen der Ausdruck

$$R = -7\nu^2 + 22\nu + 1,$$

der für $\nu = 2$ den Wert 17 annimmt, also kein Quadrat einer ganzen Zahl ist, für $\nu > 3$ aber negativ wird. Die zugehörigen Werte von ϱ sind daher keine reellen rationalen Zahlen. Der Fall $\nu = 3$ blieb von vornherein ausgeschlossen.

3. Es sei jetzt wieder der Exponent μ eine rationale oder irrationale Größe, es werden also die beschränkenden Voraussetzungen des vorigen Abschnittes fallen gelassen. Wenn μ dem Intervall $\mathfrak{C}'$ angehört, d. h. die Ungleichung $\mu_2 < \mu < \mu_1$ besteht, sind die Wurzeln der charakteristischen Gleichung konjugiert komplexe Zahlen mit dem reellen Teil $+\frac{1}{2}$:

$$\beta_1 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{D}), \qquad \beta_2 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{D}),$$

wo der Ausdruck (36) für D in diesem Falle negativ ist. Man hat die Funktionen v_k und w_k, welche dem System (33) genügen, nach Potenzen von

$$\omega_1 = \gamma_1 t^{\beta_1} \quad \text{und} \quad \omega_2 = \gamma_2 t^{\beta_2}$$

zu entwickeln. Zu dem Zwecke setze man

$$(40) \qquad v_k = \sum_{m=1}^{\infty} A_m, \qquad w_k = \sum_{m=1}^{\infty} B_m, \qquad v_k - w_k = \sum_{m=1}^{\infty} E_m.$$

A_m, B_m und E_m sind homogene Funktionen von ω_1 und ω_2, deren Grad durch den Index bezeichnet wird. Eine ähnliche Entwickelung für das Polynom $H(v_k, w_k)$ findet man folgendermaßen: Man bildet zunächst den Ausdruck

$$(v_k - w_k)^h = Q_h^{(h)} + Q_{h+1}^{(h)} + Q_{h+2}^{(h)} + \cdots,$$

in welchem der obere Index angibt, zu welchem Exponenten von $v_k - w_k$ die betreffende Q-Funktion gehört, während der untere ihren Grad bestimmt. Die Berechnung dieser Funktionen erfolgt durch die Rekursionsformel

$$(41) \qquad lE_1 Q_{h+l}^{(h)} = \sum_{n=1}^{l} (hn - l + n)\, E_{n+1} Q_{h+l-n}^{(h)},$$

also z. B.

$$E_1 Q_{h+1}^{(h)} = hE_2 Q_h^{(h)},$$
$$2E_1 Q_{h+2}^{(h)} = (h-1)\, E_2 Q_{h+1}^{(h)} + 2hE_3 Q_h^{(h)},$$
$$3E_1 Q_{h+3}^{(h)} = (h-2)\, E_2 Q_{h+2}^{(h)} + (2h-1)\, E_3 Q_{h+1}^{(h)} + 3hE_4 Q_h^{(h)},$$
u. s. w.

Für $l = 0$ gilt die allgemeine Formel (41) nicht; in diesem Falle ist $Q_h^{(h)} = E_1^h = (A_1 - B_1)^h$. Die so erhaltenen Potenzen von $v_k - w_k$ setzt man in

$$H(v_k, w_k) = \varkappa \sum_{h=2}^{\nu} \frac{\nu_h \alpha_k^{\nu-h}}{(\beta_1 - \beta_2)^h} (v_k - w_k)^h$$

ein, sammelt die Glieder gleicher Dimension und vereinigt sie zu homogenen Funktionen,

$$(42) \quad \begin{cases} H(v_k, w_k) = \sum_{m=2}^{\infty} P_m, \\ P_m = \varkappa \left\{ \frac{\nu_2 \alpha_k^{\nu-2}}{(\beta_1 - \beta_2)^2} Q_m^{(2)} + \frac{\nu_3 \alpha_k^{\nu-3}}{(\beta_1 - \beta_2)^3} Q_m^{(3)} + \cdots + \frac{\nu_m \alpha_k^{\nu-m}}{(\beta_1 - \beta_2)^m} Q_m^{(m)} \right\}. \end{cases}$$

Wenn $m \leqq \nu$ ist, besitzt die Summe auf der rechten Seite genau $m - 1$ Glieder; ist jedoch $m > \nu$, so erhält man immer $\nu - 1$ Summanden. Man kann auch die P_m allein durch die E-Funktionen mit niederem Index darstellen, indem man von der Rekursionsformel (41) Gebrauch macht. Die Ergebnisse sind allerdings weniger übersichtlich; so ist z. B.

$$P_2 = \frac{\varkappa \nu_2 \alpha_k^{\nu-2}}{(\beta_1 - \beta_2)^2} E_1^2,$$
$$P_3 = \frac{\varkappa \nu_2 \alpha_k^{\nu-2}}{(\beta_1 - \beta_2)^2} 2E_1 E_2 + \frac{\varkappa \nu_3 \alpha_k^{\nu-3}}{(\beta_1 - \beta_2)^3} E_1^3,$$
$$P_4 = \frac{\varkappa \nu_2 \alpha_k^{\nu-2}}{(\beta_1 - \beta_2)^2} (2E_1 E_3 + E_2^2) + \frac{\varkappa \nu_3 \alpha_k^{\nu-3}}{(\beta_1 - \beta_2)^3} 3E_1^2 E_2 + \frac{\varkappa \nu_4 \alpha_k^{\nu-4}}{(\beta_1 - \beta_2)^4} E_1^4,$$
u. s. w.

Nach diesen Vorbereitungen bestimmt man zuerst A_1 und B_1 aus

$$\beta_1 \omega_1 \frac{\partial A_1}{\partial \omega_1} + \beta_2 \omega_2 \frac{\partial A_1}{\partial \omega_2} - \beta_1 A_1 = 0,$$
$$\beta_1 \omega_1 \frac{\partial B_1}{\partial \omega_1} + \beta_2 \omega_2 \frac{\partial B_1}{\partial \omega_2} - \beta_2 B_1 = 0$$

und findet $A_1 = \omega_1$, $B_1 = \omega_2$, $E_1 = \omega_1 - \omega_2$. Die übrigen A_m und B_m ergeben sich aus den Gleichungen

$$(43) \quad \begin{aligned} \beta_1 \omega_1 \frac{\partial A_m}{\partial \omega_1} + \beta_2 \omega_2 \frac{\partial A_m}{\partial \omega_2} - \beta_1 A_m + P_m = 0, \\ \beta_1 \omega_1 \frac{\partial B_m}{\partial \omega_1} + \beta_2 \omega_2 \frac{\partial B_m}{\partial \omega_2} - \beta_2 B_m + P_m = 0. \end{aligned}$$

Wenn man A_m, B_m und P_m in der Form

$$A_m = \sum_{\lambda=0}^{m} a_{m-\lambda,\lambda} \omega_1^{m-\lambda} \omega_2^{\lambda}, \qquad B_m = \sum_{\lambda=0}^{m} b_{m-\lambda,\lambda} \omega_1^{m-\lambda} \omega_2^{\lambda}, \qquad P_m = \sum_{\lambda=0}^{m} p_{m-\lambda,\lambda} \omega_1^{m-\lambda} \omega_2^{\lambda}$$

schreibt, werden die unbekannten Koeffizienten aus den Formeln

$$(44)\qquad a_{m-\lambda,\lambda} = -\frac{p_{m-\lambda,\lambda}}{\beta_1(m-\lambda-1)+\beta_2\lambda}, \qquad b_{m-\lambda,\lambda} = -\frac{p_{m-\lambda,\lambda}}{\beta_1(m-\lambda)+\beta_2(\lambda-1)}$$

berechnet. —

Gaskugeln. Es wurde früher bewiesen, daß $\nu > 3$ sein muß, $\nu = 5$ ausgenommen. In diesem Falle besteht das Problem darin, Reihen aufzustellen, welche nur reelle Glieder enthalten. Zwar läßt sich nicht vermeiden, daß die Ausdrücke für v_k und w_k diese Bedingung nicht erfüllen; anders verhält es sich jedoch mit

$$\xi - \alpha_k = \frac{v_k - w_k}{\beta_1 - \beta_2}, \qquad \eta = t\frac{d\xi}{dt}.$$

Zunächst ist klar, daß für α_k nur die reellen Wurzeln der Gleichung $\xi^{\nu-1} = 1$ in Betracht kommen, also entweder $+1$ oder, wenn ν eine ungerade Zahl ist, auch -1. Der zugehörige Wert von α_k werde mit α bezeichnet. Sodann definiert man eine reelle Größe q durch die Relation

$$q = \frac{1}{\nu-5}\sqrt{7\nu^2 - 22\nu - 1},$$

woraus

$$\beta_1 = \frac{1}{2}(1+qi), \qquad \beta_2 = \frac{1}{2}(1-qi), \qquad \varkappa = \frac{1+q^2}{4(\nu-1)}$$

folgt. Ferner entwickelt man $\xi - \alpha$ und η nach homogenen Funktionen wachsenden Grades:

$$\xi - \alpha = \sum_{m=1}^{\infty} \Xi_m, \qquad \eta = \sum_{m=1}^{\infty} \mathsf{H}_m.$$

Berechnung von $\Xi_1 = \dfrac{A_1 - B_1}{\beta_1 - \beta_2}$ und $\mathsf{H}_1 = t\dfrac{d\Xi_1}{dt}$:

$A_1 - B_1 = \omega_1 - \omega_2 = \gamma_1 t^{\frac{1}{2}(1+qi)} - \gamma_2 t^{\frac{1}{2}(1-qi)}$. An Stelle der willkürlichen Konstanten γ_1 und γ_2 führt man zwei andere γ und ε' ein, indem man

$$\gamma_1 = \gamma e^{i\varepsilon'}, \qquad \gamma_2 = \gamma e^{-i\varepsilon'}, \qquad i = \sqrt{-1},$$

setzt. Dann wird

$$\omega_1 - \omega_2 = 2i\gamma t^{\frac{1}{2}} \sin\left(\varepsilon' + \frac{1}{2}q\log t\right),$$

und wenn man zur Abkürzung $\vartheta = \varepsilon' + \dfrac{1}{2}q\log t$ schreibt,

$$\Xi_1 = \frac{2\gamma}{q} t^{\frac{1}{2}} \sin\vartheta,$$

$$\mathsf{H}_1 = \frac{\gamma}{q} t^{\frac{1}{2}} \sin\vartheta + \gamma t^{\frac{1}{2}} \cos\vartheta.$$

Bemerkenswert an diesen Ausdrücken ist die Tatsache, daß die Funktion $\log t$ unter dem Kosinus- und Sinuszeichen auftritt. Nähert sich t auf der reellen Achse dem Nullpunkt, so werden zwar $\sin\vartheta$ und $\cos\vartheta$ unbestimmt, aber $t^{\frac{1}{2}}\sin\vartheta$ und $t^{\frac{1}{2}}\cos\vartheta$ konvergieren gegen Null.

Berechnung von $\Xi_2 = \dfrac{A_2 - B_2}{\beta_1 - \beta_2}$ und $\mathsf{H}_2 = t\dfrac{d\Xi_2}{dt}$:

Die homogenen Funktionen A_2, B_2 und E_2 haben die Gestalt

$$A_2 = a_{20}\omega_1^2 + a_{11}\omega_1\omega_2 + a_{02}\omega_2^2,$$

$$B_2 = b_{20}\omega_1^2 + b_{11}\omega_1\omega_2 + b_{02}\omega_2^2,$$

$$E_2 = A_2 - B_2 = e_{20}\omega_1^2 + e_{11}\omega_1\omega_2 + e_{02}\omega_2^2.$$

Mit Hilfe der Relationen (44) gelangt man zu folgenden Werten für die Koeffizienten:

$$a_{20} = -\frac{\varkappa\nu_2\alpha^{\nu-2}}{\beta_1(\beta_1-\beta_2)^2}, \qquad a_{11} = +\frac{2\varkappa\nu_2\alpha^{\nu-2}}{\beta_2(\beta_1-\beta_2)^2}, \qquad a_{02} = -\frac{\varkappa\nu_2\alpha^{\nu-2}}{(2\beta_2-\beta_1)(\beta_1-\beta_2)^2},$$

$$b_{20} = -\frac{\varkappa\nu_2\alpha^{\nu-2}}{(2\beta_1-\beta_2)(\beta_1-\beta_2)^2}, \qquad b_{11} = +\frac{2\varkappa\nu_2\alpha^{\nu-2}}{\beta_1(\beta_1-\beta_2)^2}, \qquad b_{02} = -\frac{\varkappa\nu_2\alpha^{\nu-2}}{\beta_2(\beta_1-\beta_2)^2},$$

$$e_{20} = -\frac{\varkappa\nu_2\alpha^{\nu-2}}{\beta_1(2\beta_1-\beta_2)(\beta_1-\beta_2)}, \qquad e_{11} = +\frac{2\varkappa\nu_2\alpha^{\nu-2}}{\beta_1\beta_2(\beta_1-\beta_2)}, \qquad e_{02} = -\frac{\varkappa\nu_2\alpha^{\nu-2}}{\beta_2(2\beta_2-\beta_1)(\beta_1-\beta_2)}.$$

Man hat noch die angegebenen Ausdrücke für β_1, β_2, $\varkappa$, ω_1 und ω_2 zu berücksichtigen, so daß schließlich

$$\Xi_2 = \frac{\nu\gamma^2\alpha^{\nu-2}}{q^2}\, t\left(\frac{1-3q^2}{1+9q^2}\cos 2\vartheta + \frac{4q}{1+9q^2}\sin 2\vartheta - 1\right),$$

$$\mathsf{H}_2 = \frac{\nu\gamma^2\alpha^{\nu-2}}{q^2}\, t\left\{\frac{1+q^2}{1+9q^2}\cos 2\vartheta + \frac{3q(1+q^2)}{1+9q^2}\sin 2\vartheta - 1\right\}$$

wird.

Es ist nicht schwierig, die allgemeine Form der Funktionen Ξ_m und H_m zu bestimmen. Die darin auftretenden Glieder haben, abgesehen von konstanten Faktoren, die Gestalt

$$t^{\frac{m}{2}}\cos(m-2\lambda)\,\vartheta, \qquad t^{\frac{m}{2}}\sin(m-2\lambda)\,\vartheta,$$

wo λ, wenn m gerade ist, die Reihe der ganzen Zahlen von 0 bis $\frac{m}{2}$ und für ungerade m die Reihe von 0 bis $\frac{m-1}{2}$ durchläuft. Übrigens haben die Funktionen

$$\cos\left[(m-2\lambda)\left(\varepsilon' + \frac{1}{2}q\log t\right)\right], \qquad \sin\left[(m-2\lambda)\left(\varepsilon' + \frac{1}{2}q\log t\right)\right]$$

die Eigenschaft, daß ihre Nullstellen eine geometrische Reihe bilden; während sie auf der einen Seite immer weiter auseinandergehen, drängen sie sich auf der anderen immer enger zusammen.

4. Die Intervalle $\mathfrak{A}_2'$ und $\mathfrak{B}_2'$ gehören zu Werten von μ, welche den Ungleichungen $\mu_1 < \mu < \nu+1$ bzw. $2 < \mu < \mu_2$ entsprechen. Beide Wurzeln der charakteristischen Gleichung sind positiv. Wenn ihr Quotient keine ganze Zahl ist, gelten dieselben Entwickelungen wie im Falle der konjugiert komplexen Wurzeln, wenigstens was die äußere Form der Reihen betrifft, die nach Potenzen von ω_1 und ω_2 fortschreiten.

Es sei nun $\frac{\beta_1}{\beta_2} = g$, wo g eine positive ganze Zahl ist, die im Gegensatz zum ersten Lösungssystem auch gleich Eins sein darf. Es wurde bereits an einer früheren Stelle bewiesen, daß sich die zugehörigen Werte von μ über die Intervalle $\mathfrak{A}_2'$ und $\mathfrak{B}_2'$ erstrecken. — Die Differentialgleichungen (9), welche sich auch in der Form

$$t\frac{d\xi}{dt} = \eta,$$

$$t\frac{d\eta}{dt} = \eta - \varkappa(\nu-1)(\xi-\alpha_k) - \varkappa\sum_{h=2}^{\nu}\nu_h\alpha_k^{\nu-h}(\xi-\alpha_k)^h$$

schreiben lassen, gehen durch die Substitutionen

$$v_k = -g(\xi-\alpha_k) + (g+1)\,\eta, \qquad w_k = +g(\xi-\alpha_k) + (g+1)\,\eta, \qquad \omega = t^{\beta_2} = t^{\frac{1}{g+1}}$$

in das System

$$(45)\qquad \begin{aligned} \omega \frac{dv_k}{d\omega} &= v_k - J(v_k, w_k), \\ \omega \frac{dw_k}{d\omega} &= g w_k + (g+1)\, v_k - J(v_k, w_k) \end{aligned}$$

über, wo das Polynom $J(v_k, w_k)$ durch den Ausdruck

$$(46)\qquad J(v_k, w_k) = \frac{1}{\nu - 1} \sum_{h=2}^{\nu} (-1)^h \frac{\nu_h \alpha_k^{\nu-h}}{2^h g^{h-1}} (v_k - w_k)^h$$

definiert wird. Aus (45) sollen nun durch geeignete Transformationen andere Differentialgleichungen hergestellt werden, welche die Form

$$(47)\qquad \begin{aligned} \omega \frac{dv_k}{d\omega} &= v_k + \chi_1(v_k, z_k), \\ \omega \frac{dz_k}{d\omega} &= z_k + \varepsilon v_k + \chi_2(v_k, z_k) \end{aligned}$$

haben. Hierin sind χ_1 und χ_2 ganze rationale Funktionen, in denen die Glieder von geringerer als der zweiten Dimension fehlen. Es wird sich zeigen, daß der Koeffizient ε stets von Null verschieden ist, daß also in den zugehörigen Reihenentwicklungen Logarithmen erscheinen.

Wenn $g = 1$ ist, hat das System (45) von vornherein die verlangten Eigenschaften. Der Koeffizient ε ist gleich 2. Im Falle $g = 2$ macht man von der Substitution

$$w_k = v_k(z_k - 3)$$

Gebrauch und erhält das System

$$\begin{aligned} \omega \frac{dv_k}{d\omega} &= v_k - \frac{1}{\nu - 1} \sum_{h=2}^{\nu} \frac{\nu_h \alpha_k^{\nu-h}}{2^{2h-1}} v_k^h (z_k - 4)^h, \\ \omega \frac{dz_k}{d\omega} &= z_k + \frac{1}{\nu - 1} \sum_{h=2}^{\nu} \frac{\nu_h \alpha_k^{\nu-h}}{2^{2h-1}} v_k^{h-1} (z_k - 4)^{h+1}. \end{aligned}$$

In der zweiten Gleichung ist noch ein lineares Glied mit dem Faktor v_k vorhanden, das man aus der Summe herausnehmen muß, um die Normalform (47) zu finden; dann wird $\varepsilon = -4\nu\alpha_k^{\nu-2}$.

Weniger einfach liegen die Verhältnisse, wenn $g > 2$ ist. Es sei φ eine noch zu bestimmende Funktion von v_k und

$$w_k = v_k^{g-1} z_k + v_k \varphi;$$

dann entsteht aus (45) das System

$$(48)\qquad \begin{aligned} \omega \frac{dv_k}{d\omega} &= v_k - L \\ \omega \frac{dz_k}{d\omega} &= z_k + M + N, \end{aligned}$$

wo

$$(49)\qquad \begin{cases} L = \dfrac{1}{\nu - 1} \displaystyle\sum_{h=2}^{\nu} \frac{\nu_h \alpha_k^{\nu-h}}{2^h g^{h-1}} v_k^h [v_k^{g-2} z_k + (\varphi - 1)]^h, \\ M = v_k^{-(g-2)} \left[(g-1)\, \varphi + g + 1 - v_k \dfrac{d\varphi}{dv_k} \right], \\ N = v_k^{-(g-1)} \left[(g-1)\, v_k^{g-2} z_k + v_k \dfrac{d\varphi}{dv_k} + (\varphi - 1) \right] \cdot L \end{cases}$$

ist. Wenn man die ganze rationale Funktion φ von v_k keinen weiteren Beschränkungen unterwirft, treten in M und N nicht nur lineare Glieder, sondern auch die sogenannten *Hauptglieder* auf, deren Dimension kleiner als $+1$ ist. Man muß daher φ so bestimmen, daß sich die Hauptglieder in $M+N$ gegenseitig aufheben. Zunächst möge φ weder für $v_k = 0$ noch für $v_k = 1$ verschwinden.

In N treten Glieder auf, welche mit $v_k^{g-2} z_k$ multipliziert werden, nämlich

$$v_k^{-(g-1)}(g-1)\, v_k^{g-2} z_k L = (g-1)\, v_k^{-1} z_k L.$$

Da L den Faktor v_k^2 besitzt, sind diese Glieder mindestens von der zweiten Dimension und kommen daher für die Bestimmung der Funktion φ nicht in Betracht. Man kann den Ausdruck

$$N_0 = v_k^{-(g-1)} \left[v_k \frac{d\varphi}{dv_k} + (\varphi - 1) \right] \cdot L$$

noch weiter vereinfachen, wenn man berücksichtigt, daß L die Entwickelung

$$(v_k^{g-2} z_k + \varphi - 1)^h = (\varphi - 1)^h + h(\varphi - 1)^{h-1} v_k^{g-2} z_k + \cdots$$

enthält, welche mit v_k^{h-g+1} zu multiplizieren ist. Da nun $h \geqq 2$ ist, sind alle Glieder, die auf das erste folgen, mindestens von der zweiten Dimension. Es genügt also, in N den Bestandteil

$$N_* = \frac{1}{\nu - 1} \left(v_k \frac{d\varphi}{dv_k} + \varphi - 1 \right) \sum_{h=2}^{\nu} \frac{\nu_h \alpha_k^{\nu-h}}{2^h g^{h-1}} (\varphi - 1)^h\, v_k^{h-g+1}$$

zu untersuchen. Die Funktionen M und N_* müssen für $v_k = 0$ von derselben Ordnung unendlich werden, d. h. es verschwindet

$$(g-1)\,\varphi + g + 1 - v_k \frac{d\varphi}{dv_k}$$

für $v_k = 0$ von der ersten Ordnung. Um dies zu erreichen, kann man

$$\varphi = -\frac{g+1}{g-1} + v_k \psi$$

setzen, wo die ganze rationale Funktion ψ für $v_k = 0$ nicht verschwindet. Man schreibt zur Abkürzung

$$\Phi = v_k \frac{d\psi}{dv_k} - (g-2)\,\psi, \qquad \Psi = v_k \frac{d\psi}{dv_k} + 2\psi$$

und erhält

$$M = -\, v_k^{3-g} \Phi,$$

$$N_* = \frac{1}{\nu - 1} \left(v_k \Psi - \frac{2g}{g-1} \right) \sum_{h=2}^{\nu} \frac{\nu_h \alpha_k^{\nu-h}}{2^h g^{h-1}} \left(v_k \psi - \frac{2g}{g-1} \right)^h v_k^{h-g+1}.$$

Den Grad von ψ bestimmt man so, daß in M nur Hauptglieder vorkommen; dann wird

$$(50) \qquad \begin{cases} \psi = a_0 + a_1 v_k + a_2 v_k^2 + \cdots + a_{g-3} v_k^{g-3}, \\ M = \sum_{m=3}^{g} (g - m + 1)\, a_{m-3} v_k^{m-g}. \end{cases}$$

Nachdem die Struktur der rationalen Funktion M klargestellt ist, muß man noch N_* nach Potenzen von v_k entwickeln. Der erste Schritt führt zu der Formel

$$(51) \quad N_* = \frac{v^{3-g}}{\nu - 1} \sum_{h=2}^{\nu} \frac{\nu_h \alpha_k^{\nu-h}}{2^h g^{h-1}} \sum_{i=0}^{h+1} \left(\frac{2g}{1-g} \right)^{h-i+1} (h_i \psi^i + h_{i-1} \psi^{i-1} \Psi)\, v_k^{h+i-2}.$$

Hierin ist

$$\psi^i = b_{0i} + b_{1i}v_k + b_{2i}v_k^2 + \cdots + b_{pi}v_k^p$$

und $p = (g-3)i$. Die Koeffizienten b_{mi} lassen sich aus den a_n durch Rekursionsformeln berechnen. Ferner wird

$$h_i\psi^i + h_{i-1}\psi^{i-1}\Psi = c_{0i}^{(h)} + c_{1i}^{(h)}v_k + c_{2i}^{(h)}v_k^2 + \cdots + c_{pi}^{(h)}v_k^p,$$

$$c_{mi}^{(h)} = \left[h_i + \left(2 + \frac{m}{i}\right)h_{i-1}\right] b_m.$$

Zu beachten sind die folgenden besonderen Werte der $c_{mi}^{(h)}$:

$$(52)\qquad \begin{cases} c_{mi}^{(h)} = 1, \text{ wenn } m = i = 0 \text{ ist,} \\ c_{mi}^{(h)} = 0, \quad ,, \quad m > 0, i = 0 \text{ ist,} \\ c_{mi}^{(h)} = 0, \quad ,, \quad m < 0 \text{ ist.} \end{cases}$$

In der Entwickelung von N_* hat man nacheinander $h = 2, 3, \ldots, \nu$ zu setzen und dementsprechend die Zerlegung

$$N_* = N_*^{(2)} + N_*^{(3)} + \cdots + N_*^{(\nu)}$$

vorzunehmen. Der Funktion $N_*^{(h)}$ kann man die Form

$$(53)\qquad N_*^{(h)} = \frac{1}{\nu - 1}\frac{\nu_h \alpha_k^{\nu-h}}{2^h g^{h-1}} \sum_{m=h+1}^{g+1} S_{mh} v_k^{m-g} + \cdots, \qquad h = 2, 3, \ldots, \nu,$$

geben, wo

$$S_{mh} = \left(\frac{2g}{1-g}\right)^{h+1} c_{m-h-1,0}^{(h)} + \left(\frac{2g}{1-g}\right)^{h} c_{m-h-2,1}^{(h)} + \cdots + \frac{2g}{1-g} c_{m-2h-1,h}^{(h)} + c_{m-2h-2,h+1}^{(h)}$$

ist. Die obere Grenze in der Summe (53) wurde so gewählt, daß darin nur lineare und Hauptglieder erscheinen; natürlich treten in $N_*^{(h)}$ auch noch andere auf, wenn man $m = g+2, g+3, \ldots$ setzt; aber diese brauchen hier nicht berücksichtigt zu werden, weil sie von höherer als der ersten Dimension sind und deshalb zur Funktion χ_2 der Gleichungen (47) gehören. Ist $h > g$, so enthält $N_*^{(h)}$ überhaupt keine linearen und Hauptglieder. Daraus folgt, daß die obige Zerlegung von N_* für $g > \nu$ gilt, während man für $g \leqq \nu$

$$N_* = N_*^{(2)} + N_*^{(3)} + \cdots + N_*^{(g)}$$

zu schreiben hat. Was nun die Koeffizienten S_{mh} betrifft, so ergibt sich aus (52), daß $S_{mh} = 0$ wird, wenn $m \leqq h$ ist, und $S_{mh} \neq 0$ für $m > h$. Unter Benutzung des Ausdruckes (53) wird

$$(54)\qquad N_* = \frac{1}{\nu - 1}\sum_{m=3}^{g+1}\left\{\frac{\nu_2\alpha_k^{\nu-2}}{2^2 g} S_{m2} + \frac{\nu_3\alpha_k^{\nu-3}}{2^3 g^2} S_{m3} + \cdots + \frac{\nu_{m-1}\alpha_k^{\nu-m+1}}{2^{m-1}g^{m-2}} S_{m,m-1}\right\} v_k^{m-g}$$
$$+ \text{ Glieder höherer Ordnung.}$$

Nunmehr kann man dazu übergehen, die Koeffizienten der Funktion ψ zu bestimmen; man braucht in $M + N_*$ nur die Hauptglieder einzeln gleich Null zu setzen:

$$(55)\quad (g-m+1)\,a_{m-3} = -\frac{1}{\nu-1}\left\{\frac{\nu_2\alpha_k^{\nu-2}}{2^2 g} S_{m2} + \frac{\nu_3\alpha_k^{\nu-3}}{2^3 g^2} S_{m3} + \cdots + \frac{\nu_{m-1}\alpha_k^{\nu-m+1}}{2^{m-1}g^{m-2}} S_{m,m-1}\right\},$$
$$m = 3, 4, \ldots, g.$$

Auf der rechten Seite kommen nur a-Koeffizienten vor, welche man vorher berechnet hat. Man erhält z. B.

$$a_0 = \frac{\nu g^2}{\alpha_k (g-1)^3 (g-2)}, \quad a_1 = -\frac{1}{\alpha_k^2}\left[\frac{2\nu^2 g^3}{(g-1)^5 (g-2)(g-3)} + \frac{\nu(\nu-2)\, g^2}{3(g-1)^4 (g-3)}\right], \quad \text{u.s.w.}$$

Es versteht sich von selbst, daß keiner der Nenner verschwindet; denn in Betracht kommt a_0 nur dann, wenn $g > 2$ ist, und a_1 für $g > 3$. — Das lineare Glied in $M + N_*$ liefert den Koeffizienten ε:

$$(56) \qquad \varepsilon = \frac{1}{\nu - 1}\left\{\frac{\nu_2 \alpha_k^{\nu-2}}{2^2 g} S_{g+1,2} + \frac{\nu_3 \alpha_k^{\nu-3}}{2^3 g^2} S_{g+1,3} + \cdots + \frac{\nu_g \alpha_k^{\nu-g}}{2^g g^{g-1}} S_{g+1,g}\right\};$$

für $g = 3$ ist $\varepsilon = \dfrac{3\nu(5\nu-1)}{8\alpha_k^2}$. Da die Größen ε von Null verschieden sind, enthalten die Reihenentwickelungen der Funktionen v_k, z_k, w_k stets Logarithmen.

5. Die Intervalle $\mathfrak{A}_1'$ und $\mathfrak{B}_1'$ umfassen die Werte $\mu > \nu + 1$ und $\mu < 2$. Von den Wurzeln der charakteristischen Gleichung ist die eine

$$\beta_1 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{D}), \qquad D = \frac{4\nu(\mu - \mu_1)(\mu - \mu_2)}{(2\mu - \nu - 3)^2},$$

positiv, die andere $\beta_2 = \dfrac{1}{2}(1 - \sqrt{D})$ negativ. Die Funktionen v_k und w_k der Variabeln $\omega_1 = \gamma_1 t^{\beta_1}$ bestimmt man aus den Gleichungen

$$\beta_1 \omega_1 \frac{dv_k}{d\omega_1} = \beta_1 v_k - H(v_k, w_k), \qquad \beta_1 \omega_1 \frac{dw_k}{d\omega_1} = \beta_2 w_k - H(v_k, w_k),$$

wo der Ausdruck für $H(v_k, w_k)$ bereits an einer früheren Stelle mitgeteilt wurde. Man macht den Ansatz

$$v_k = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \omega_1^m, \qquad w_k = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \omega_1^m, \qquad v_k - w_k = \sum_{m=1}^{\infty} e_m \omega_1^m$$

und stellt zunächst eine Rekursionsformel für die Koeffizienten der Reihenentwickelung

$$(v_k - w_k)^h = q_h^{(h)} \omega_1^h + q_{h+1}^{(h)} \omega_1^{h+1} + q_{h+2}^{(h)} \omega_1^{h+2} + \cdots$$

auf:

$$(57) \qquad l e_1 q_{h+l}^{(h)} = \sum_{n=1}^{l} (hn - l + n)\, e_{n+1} q_{h+l-n}^{(h)},$$
$$h = 2, 3, 4, \ldots; \qquad l = 1, 2, 3, \ldots.$$

Für $l = 0$ wird $q_h^{(h)} = e_1^h$. Der Funktion $H(v_k, w_k)$ kann man die Form

$$H(v_k, w_k) = \sum_{m=2}^{\infty} p_m \omega_1^m$$

geben, wo

$$(58) \qquad p_m = \varkappa\left\{\frac{\nu_2 \alpha_k^{\nu-2}}{(\beta_1 - \beta_2)^2} q_m^{(2)} + \frac{\nu_3 \alpha_k^{\nu-3}}{(\beta_1 - \beta_2)^3} q_m^{(3)} + \cdots + \frac{\nu_m \alpha_k^{\nu-m}}{(\beta_1 - \beta_2)^m} q_m^{(m)}\right\}$$

ist. Dieser Koeffizient besteht aus $m - 1$ bzw. $\nu - 1$ Gliedern, je nachdem $m \leqq \nu$ oder $m > \nu$ ist. Nunmehr ermittelt man die a_m, b_m und e_m; es ist $a_1 = 1$, $b_1 = 0$, $e_1 = 1$ und allgemein

$$(59) \quad a_m = -\frac{p_m}{(m-1)\beta_1}, \qquad b_m = -\frac{p_m}{m\beta_1 - \beta_2}, \qquad e_m = -\frac{p_m(\beta_1 - \beta_2)}{(m-1)\beta_1(m\beta_1 - \beta_2)}.$$
$$m = 2, 3, 4, \ldots.$$

Der Quotient $\dfrac{a_m}{b_m}$ liegt zwischen zwei positiven Grenzen, die größer als Eins sind. Man sieht nämlich leicht ein, daß

$$\frac{m}{m-1} < \frac{a_m}{b_m} < \frac{m+1}{m-1}, \qquad m = 2, 3, 4, \ldots,$$

sein muß. Es ist daher der absolute Betrag von a_m größer als der von b_m. Wenn m unbegrenzt wächst, nähert sich der Quotient dem Werte Eins. —

Außer den Entwicklungen in der Umgebung von $t = 0$ gibt es auch andere, die für hinreichend große Werte von t konvergieren; sie schreiten nach Potenzen von $\omega_2 = \gamma_2 t^{\beta_2}$ fort. —

Für die *Gaskugeln* kommt in diesem Zusammenhange nur der Fall $\nu = 2$ in Betracht. Die Wurzeln der charakteristischen Gleichung haben die Werte:

$$\beta_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{17}, \qquad \beta_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{17}.$$

Sowohl wenn $\mu = 1$ als auch wenn $\mu = 4$ ist, wird $\varkappa = -\frac{2}{9}$ und

$$p_m = -\frac{2}{17} q_m^{(2)}.$$

Die Reihen eignen sich gut für numerische Rechnungen, weil die Koeffizienten ziemlich schnell mit wachsendem Index abnehmen, wie aus der folgenden Tabelle hervorgeht:

$a_1 = 1{,}00000$	$b_1 = 0{,}00000$	$e_1 = 1{,}00000$
$a_2 = 0{,}09910$	$b_2 = 0{,}04593$	$e_2 = 0{,}05317$
$a_3 = 0{,}00527$	$b_3 = 0{,}00334$	$e_3 = 0{,}00193$
$a_4 = 0{,}00022$	$b_4 = 0{,}00016$	$e_4 = 0{,}00006.$

Eingegangen 20. Mai 1940.

Die Diracsche Wellengleichung und das Ikosaeder.

Herrn *Erich Salkowski* zum 60. Geburtstage.

Von *G. Haenzel* in Karlsruhe.

Die Diracsche Wellengleichung ist vier skalaren partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung gleichwertig. Es ist bisher unbekannt geblieben, daß ihr Aufbau und die Grundlagen der Diracschen Theorie strukturell mit verschiedenen klassischen und neueren mathematischen Theoremen weitgehend übereinstimmen. In zwei früheren Arbeiten [1]) wurden die Zusammenhänge der Diracschen Theorie mit der Theorie der Kegelschnitte und den Sätzen von Pascal und Brianchon, mit der Kummerschen Fläche sowie mit der Polarentheorie der Strahlenkongruenzen und Strahlenkomplexe aufgedeckt. Diese Zusammenhänge führen auf neue Zugänge zur Diracschen Theorie mit neuartigen Modellvorstellungen, die bis zur Darstellung der Unschärfe- und Vertauschbarkeitsrelationen Heisenbergs reichen. Die vorliegende Abhandlung stellt den mathematischen Zusammenhang der Diracschen Wellengleichung und ihrer Operatoren mit der Theorie der binären Formen her und leitet die Diracsche Gleichung mit ihren wichtigsten Eigenschaften und den physikalischen Folgerungen aus der Ikosaeder- und Dodekaederform ab. In ähnlicher Weise tritt die Analogie zum zehnfachen Brianchonschen Sechsseit hervor.

1. Das Ikosaeder hat 12 Ecken, 20 dreieckige Seitenflächen und 30 Kanten, die einander paarweise parallel gegenüber liegen. Daher gibt es 15 Querlinien durch den Mittelpunkt M, die auf je zwei parallelen Gegenkanten in deren Halbierungspunkten senkrecht stehen. Senkrecht zu den 6 Durchmessern d_λ des Ikosaeders verlaufen 6 Durchmesserebenen π_λ durch M $(\lambda = 0, 1, \ldots, 5)$.

Jede der sechs Durchmesserebenen π_λ wird von den fünf anderen in fünf Querlinien des Ikosaeders geschnitten und zwar in den Querlinien der fünf von π_λ halbierten Gegenkantenpaare. Die Querlinie E_{ik} ist der Schnitt der beiden Ebenen π_i und π_k. In jeder der sechs Ebenen π_i liegt eine Pentade von fünf E_{ik} und jedes E_{ik} kommt in zwei Pentaden vor, nämlich in π_i und π_k. Fig. 1 zeigt die beiden Pentaden der E_{ik} in den Ebenen π_0 und π_1. Die E_{ik} bilden also folgendes Schema:

(1)

π_0	π_1	π_2	π_3	π_4	π_5
E_{01}	E_{01}	E_{12}	E_{13}	E_{14}	E_{15}
E_{02}	E_{12}	E_{02}	E_{23}	E_{24}	E_{25}
E_{03}	E_{13}	E_{23}	E_{03}	E_{34}	E_{35}
E_{04}	E_{14}	E_{24}	E_{34}	E_{04}	E_{45}
E_{05}	E_{15}	E_{25}	E_{35}	E_{45}	E_{05}

Ferner definieren die E_{ik} 15 Drehungsachsen. Es sei $D_{ik}(\varphi)$ die Drehung mit der Drehachse E_{ik} und dem Drehwinkel φ mit einem durch das Vorzeichen von φ bestimmten

---

[1]) G. Haenzel, Geometrie und Wellenmechanik, Jahresber. d. D. M. V. **49** (1939); II, ebenda **50** (1940).

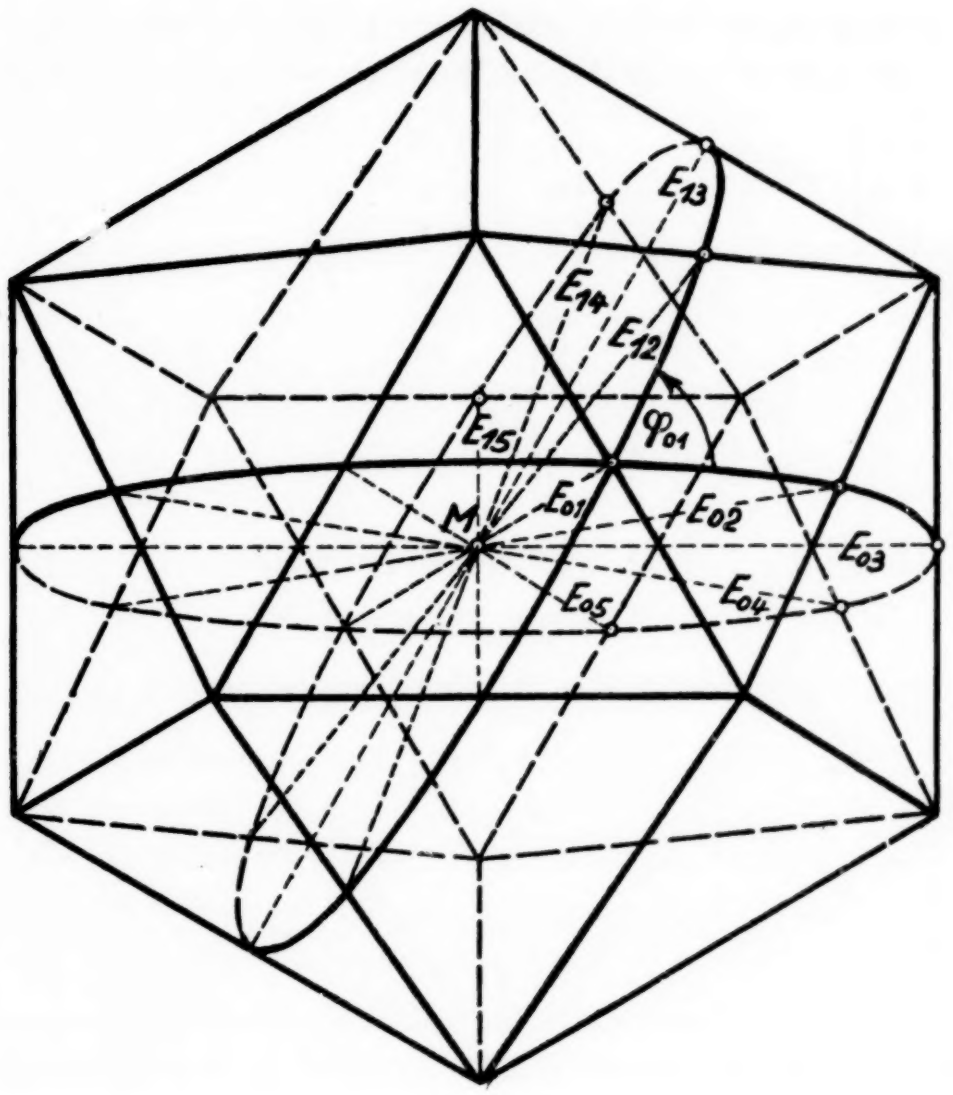


Fig. 1.

Drehsinne. Die 15 in der Ikosaedergruppe enthaltenen Drehungen $D_{ik}(\pi)$ bilden dasselbe System von 6 Pentaden wie ihre Achsen E_{ik}.

Eine gegebene Querlinie E_{ik} sei in den beiden durch sie gehenden Durchmesserebenen π_i, π_k um den Mittelpunkt M des Ikosaeders drehbar. Die Ikosaederdurchmesser $d_0, \ldots, d_5$, senkrecht zu den Durchmesserebenen $\pi_0, \ldots, \pi_5$, sind die Achsen von 6 in der Ikosaedergruppe enthaltenen zyklischen Untergruppen $n = 5$. Auf eine Querlinie E_{ik} sollen hier (außer der Identität) aber alle Drehungen um die Achse d_i durch die Winkel $\frac{k\pi}{5}$, $k = 1, 2, \ldots$ und alle Drehungen um die Achse d_k durch die gleichen Winkel angewendet werden. Das gemeinsame Element E_{ik} der Pentaden π_i und π_k halten wir fest. Die vier übrigen Elemente $E_{i\lambda}$ der Pentade π_i ($\lambda = 0, 1, \ldots, 5$, $\lambda \neq i$, $\lambda \neq k$) gehen durch vier Drehungen in den Ebenen π_λ, d. h. durch vier Drehungen um die vier Ikosaederdurchmesser d_λ in die vier entsprechenden Elemente $E_{k\lambda}$ der Pentade π_k über. Wir schreiben diese Beziehung in der Form:

$$\pi_i(E_{i\lambda})d_\lambda \to \pi_k(E_{k\lambda}). \tag{2}$$

Bei Wiederholung dieser Operation ergibt sich:

Durch die Anwendung (2) *der zulässigen Drehungen um die Ikosaederdurchmesser gehen aus einer Pentade der E_{ik} die fünf übrigen nacheinander hervor.*

2. Die E_{ik} dienen nun als Zeichen für Operatoren, die folgende Bedingungen erfüllen: die fünf E_{ik} der gleichen Pentade, z. B. die fünf E_{0k} der Pentade π_0, sollen den Gleichungen

$$E_{0i}^2 = +1, \quad E_{0i}E_{0k} = -E_{0k}E_{0i}, \quad i, k = 1, 2, \ldots, 5, \quad i \neq k \tag{3}$$

genügen. Diese Bedingungen können nicht durch Skalare erfüllt werden, wohl aber durch Operatoren, die sich als quadratische Matrizen vierten Grades darstellen, nämlich:

$$E_{01}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix},\qquad E_{02}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix},\qquad E_{03}=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&-1&0\\0&-1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix},$$

$$E_{04}=\begin{bmatrix}0&i&0&0\\-i&0&0&0\\0&0&0&-i\\0&0&i&0\end{bmatrix},\qquad E_{05}=\begin{bmatrix}0&0&0&i\\0&0&-i&0\\0&i&0&0\\-i&0&0&0\end{bmatrix}. \tag{4}$$

Aus den fünf Operatoren der Pentade π_0 entstehen mit Hilfe der Konstruktionsvorschrift

$$iE_{0i}E_{0k}=E_{ik} \tag{5}$$

die zehn übrigen Operatoren (nebst der imaginären Einheit $iE_{0i}^2=i$), nämlich:

$$\begin{cases} i(E_{01},E_{02},E_{03},E_{04})E_{05}=E_{15},E_{25},E_{35},E_{45}; \text{ sie bilden mit } E_{05} \text{ die Pentade } \pi_5,\\ i(E_{01},E_{02},E_{03},E_{05})E_{04}=E_{14},E_{24},E_{34},E_{45}; \text{ sie bilden mit } E_{04} \text{ die Pentade } \pi_4,\\ i(E_{01},E_{02},E_{04},E_{05})E_{03}=E_{13},E_{23},E_{34},E_{35}; \text{ sie bilden mit } E_{03} \text{ die Pentade } \pi_3,\\ i(E_{01},E_{03},E_{04},E_{05})E_{02}=E_{12},E_{23},E_{24},E_{25}; \text{ sie bilden mit } E_{02} \text{ die Pentade } \pi_2,\\ i(E_{02},E_{03},E_{04},E_{05})E_{01}=E_{12},E_{13},E_{14},E_{15}; \text{ sie bilden mit } E_{01} \text{ die Pentade } \pi_1. \end{cases} \tag{6}$$

Die Matrizendarstellung wird durch die Konstruktionsvorschrift (5) von den Operatoren der Pentade π_0 auf alle übrigen Operatoren übertragen. Z. B. ergeben sich für die neuen Operatoren von π_5 die Matrizendarstellungen:

$$E_{15}=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&-1\\1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{bmatrix},\qquad E_{25}=\begin{bmatrix}0&0&0&-1\\0&0&-1&0\\0&-1&0&0\\-1&0&0&0\end{bmatrix},$$

$$E_{35}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix},\qquad E_{45}=\begin{bmatrix}0&0&i&0\\0&0&0&i\\-i&0&0&0\\0&-i&0&0\end{bmatrix}.$$

In vollständiger Analogie zu dem Satz in Nr. **1** ergibt sich:

Die 15 *Operatoren* E_{ik} *dargestellt durch quadratische Matrizen vierten Grades bilden sechs Pentaden* π_λ *zu je fünf; jeder Operator kommt in zwei Pentaden vor. Werden die Operatoren einer Pentade (z. B. der Pentade* π_0*) nacheinander mit einem von ihnen kombiniert, so entstehen nacheinander die fünf übrigen Pentaden.*

Jede Pentade enthält drei reelle und zwei imaginäre Operatoren E_{ik}. Die Bedingungen (3) werden je von den fünf Operatoren einer Pentade und nie von mehr als fünf Operatoren gleichzeitig erfüllt.

Durch die Bedingungen (3) *werden die* 15 *Mittelsenkrechten des Ikosaeders oder — was dasselbe ist — die* 15 *Nullstellenpaare der Kovariante T der Ikosaederform in die* 15 *Operatoren* E_{ik} *der Operatorenreihe überführt.*

3. Im folgenden werden als Abkürzungen eingeführt:

$$t_1=\frac{\partial}{\partial x},\ t_2=\frac{\partial}{\partial y},\ t_3=\frac{\partial}{\partial z},\ t_4=\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t},\ t_5=\frac{2\pi i}{h}m_0c,$$

worin die ersten drei t_i die Differentialoperatoren nach den drei Raumdimensionen, c die Lichtgeschwindigkeit, m_0 die Ruhemasse des Elektrons, h das Elementarquantum bedeuten. Dann lautet die bekannte *Diracsche Wellengleichung* des Elektrons:

$$(7) \qquad (E_{01}t_1 + E_{02}t_2 + E_{03}t_3 + E_{04}t_4 + E_{05}t_5)\,\psi = 0 \quad \text{oder} \quad T\psi = 0.$$

Der Operator $T = \sum_1^5 E_{0i}t_i$ ist als Linearkombination der Differentialoperatoren t_i mit den E_{0i} ebenfalls als quadratische Matrix vierten Grades darstellbar. Er kann daher nicht auf eine skalare Funktion, sondern nur auf eine Vektorgröße wirken. Die *Wellenfunktion* ψ hat also vier kovariante Komponenten ψ_i. Sie kann bekanntlich als Wahrscheinlichkeit dafür angesehen werden, daß das Elektron im Punkte x, y, z anzutreffen ist. Durch Multiplikation der Diracschen Gleichung $T\psi = 0$ von links mit dem Operator T erhält man

$$T^2\psi = \left[\sum_1^5 t_i^2 E_{0i}^2 + \sum_{i,k} (E_{0i}E_{0k} + E_{0k}E_{0i})t_i t_k)\right]\psi = 0.$$

Wegen der Bedingungen (3) aber ist diese Gleichung der *relativistischen Wellengleichung zweiter Ordnung* gleichwertig:

$$\left[\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta\right) - \frac{4\pi^2 m_0 c^2}{h^2}\right]\psi = 0, \qquad \Delta \text{ Laplace-Operator, } h \text{ Elementarquantum.}$$

4. Tritt zu der kovarianten Darstellung der Wellenfunktion ψ ihre kontravariante Darstellung $\bar{\psi}$, so bilden die 16 Produkte der Komponenten von ψ und $\bar{\psi}$ einen gemischten Tensor I zweiter Stufe im R_4, der durch eine Matrix von vier Zeilen und Spalten darstellbar ist. Jede solche Matrix ist aber durch eine Linearkombination der 15 Darstellungsmatrizen der 15 Operatoren E_{ik} und der Einheitsmatrix E_{16} gegeben. Unter diesen Umständen nimmt I die Form an:

$$(8) \qquad I = \psi\bar{\psi} = \sum_{ik} j_{ik}E_{ik}, \quad j_{ik} = (\bar{\psi}E_{ik}\psi).$$

Dieser Tensor I läßt sich in bestimmte Komponenten mit wesentlichen physikalischen Bedeutungen zerlegen:

a) der Viervektor $X = j_{01}E_{01} + j_{02}E_{02} + j_{03}E_{03} + j_{04}E_{04}$,
b) der Vierervektor $M = j_{15}E_{15} + j_{25}E_{25} + j_{35}E_{35} + j_{45}E_{45}$,
c) der Sechservektor $S = j_{12}E_{12} + j_{13}E_{13} + j_{14}E_{14} + j_{23}E_{23} + j_{24}E_{24} + j_{34}E_{34}$,
d) die Skalaren $j_{05}E_{05}$ und $j_{16}E_{16}$.

Der Vektor X repräsentiert den *Viererstrom.* Seine Komponenten verhalten sich gegen Lorentztransformationen wie $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial t}$ und bilden einen kovarianten Vektor im R_4. Die drei raumartigen Komponenten sind die drei Komponenten des Vektors der Stromdichte, die zeitartige Komponente stellt die Ladungsdichte dar und das Erhaltungsgesetz von Ladung und Stromdichte kommt durch div $X = 0$ zum Ausdruck.

Dem Vektor M fällt die Rolle des *Impulsenergievektors* zu; j_{15}, j_{25}, j_{35} sind die Impulskomponenten, j_{45} repräsentiert die Eigenmasse. Die Komponenten j_{12}, j_{13}, j_{23} des Vektors S stehen zum *Elektronenspin* in Beziehung. Aus diesen Darlegungen in Verbindung mit Nr. **1** und **2** folgt die weitere Eignung des Ikosaeders zum Modell des Diracschen Elektrons.

Die physikalischen Größen und Begriffe des Diracschen Elektrons entsprechen den Konfigurationen aus den Durchmesserebenen π_i und Querlinien E_{ik} des Ikosaeders und zwar stehen folgende geometrische Figuren und wellenmechanische Größen einander gegenüber:

Pentade π_0 $(E_{01}, E_{02}, E_{03}, E_{04}, E_{05})$	Energieoperator T
Strahlenquadrupel π_0 $(E_{01}, E_{02}, E_{03}, E_{04})$	Viererstrom X
Strahlentripel π_0 (E_{01}, E_{02}, E_{03})	Stromdichte
Querlinie E_{04}	Ladungsdichte
Strahlenquadrupel π_5 $(E_{15}, E_{25}, E_{35}, E_{45})$	Impulsenergievektor
Strahlentripel π_5 (E_{15}, E_{25}, E_{35})	Impulskomponenten
Querlinie E_{45}	Eigenmasse
Vierflach $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$ $(E_{12}, E_{13}, E_{14},; E_{23}, E_{24}, E_{34})$	Sechservektor
Dreikant E_{12}, E_{13}, E_{23}	Elektronenspin.

Mit dem Ikosaeder sei ein Massensystem verknüpft, das Drehungen um die Querlinien des Ikosaeders ausführen kann; bei geeigneten statischen Momenten und Trägheitsmomenten des Massensystems bezüglich der Querlinien können die Komponenten des Impulsenergievektors durch die Drehungen um die entsprechenden Querlinien E_{ik} mit geeigneten Winkelgeschwindigkeiten ω_{ik} wiedergegeben werden.

5. Das zehnfache Brianchonsche Sechsseit[2]) (Fig. 2) ist bekanntlich aufs engste

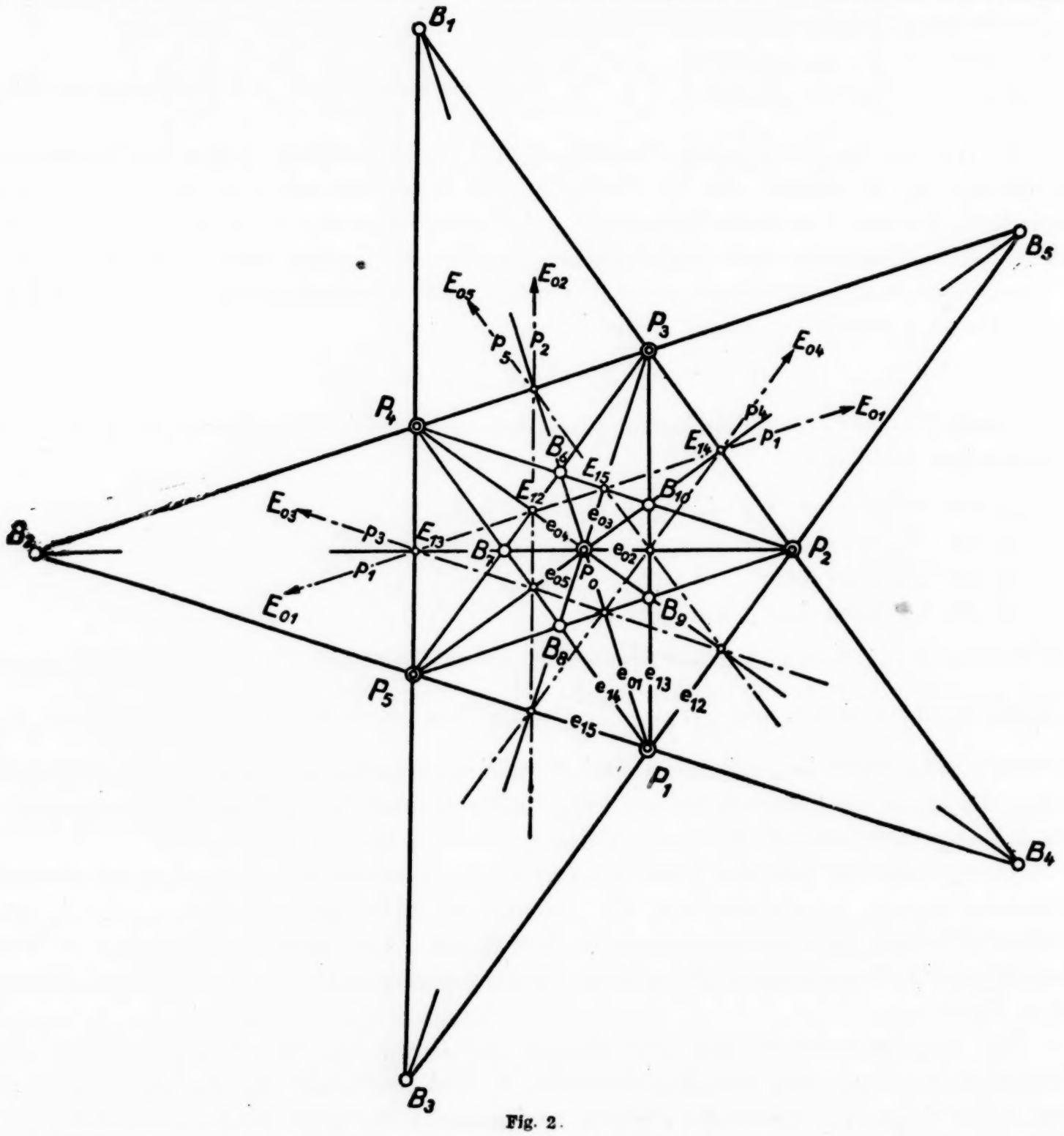


Fig. 2.

[2]) A. Clebsch, Über die Anwendung der quadratischen Substitution auf die Gleichungen fünften Grades und und die geometrische Theorie des ebenen Fünfseits, Math. Annalen 4 (1871), § 17.

mit dem Ikosaeder verwandt. Seine 15 Seiten $e_{ik} \equiv P_i P_k$ bilden sechs Pentaden, indem durch jeden der sechs Grundpunkte $P_0, P_1, \ldots, P_5$ fünf Seiten gehen und jede Seite e_{ik} gehört den Pentaden P_i und P_k an. Jeder der sechs Grundpunkte des zehnfachen Brianchonschen Sechsseites ist somit ein zehnfacher Schnittpunkt seiner Seiten e_{ik}. Außerdem haben die Seiten 10 dreifache Schnittpunkte $B_1, B_2, \ldots, B_{10}$ zu je dreien und 15 einfache Schnittpunkte E_{ik} zu je zweien. Die 15 einfachen Schnittpunkte E_{ik} und die 15 Seiten e_{ik} sind Pole und Polaren bzgl. eines (imaginären) Kegelschnittes a^2. Da nun je fünf Seiten eine Pentade $P_i(e_{i\lambda})$ bilden mit dem Grundpunkte P_i als Träger, so liegen ihre Pole $E_{i\lambda}$ auf der Polare p_i des Grundpunktes P_i, sie bilden also die polar zugeordnete Pentade $p_i(E_{i\lambda})$ und jeder Pol E_{ik} ist in den Pentaden p_i und p_k enthalten. Mit anderen Worten: *Das zehnfache Brianchonsche Sechsseit ist in dualer Weise durch seine* 15 *Seiten* e_{ik} *und durch seine* 15 *einfachen Schnittpunkte* E_{ik} *zum Diracschen Operatorensystem isomorph. Die sechs Grundpunkte* P_i *fassen die* 15 *Seiten* e_{ik} *in sechs Pentaden zusammen, ihre sechs Polaren* p_i *desgleichen die* 15 *Schnittpunkte.*

Die zehn dreifachen Schnittpunkte $B_1, B_2, \ldots, B_{10}$ sind die Brianchonschen Punkte von zehn Brianchonschen Sechsseiten, die 15 Seiten e_{ik} ordnen sich zu je sechs in diese zehn Brianchonschen Sechsseite, die zehn Kegelschnitten umbeschrieben sind. Jedes Brianchonsche Sechsseit steht für sich durch seine 15 Schnittpunkte in Isomorphie zum Diracschen Operatorensystem und stellt die physikalischen Eigenschaften des Diracschen Elekrons dar[3]). Fig. 3 zeigt die Abbildung der physikalischen Größen des Elektrons auf ein einzelnes Sechsseit.

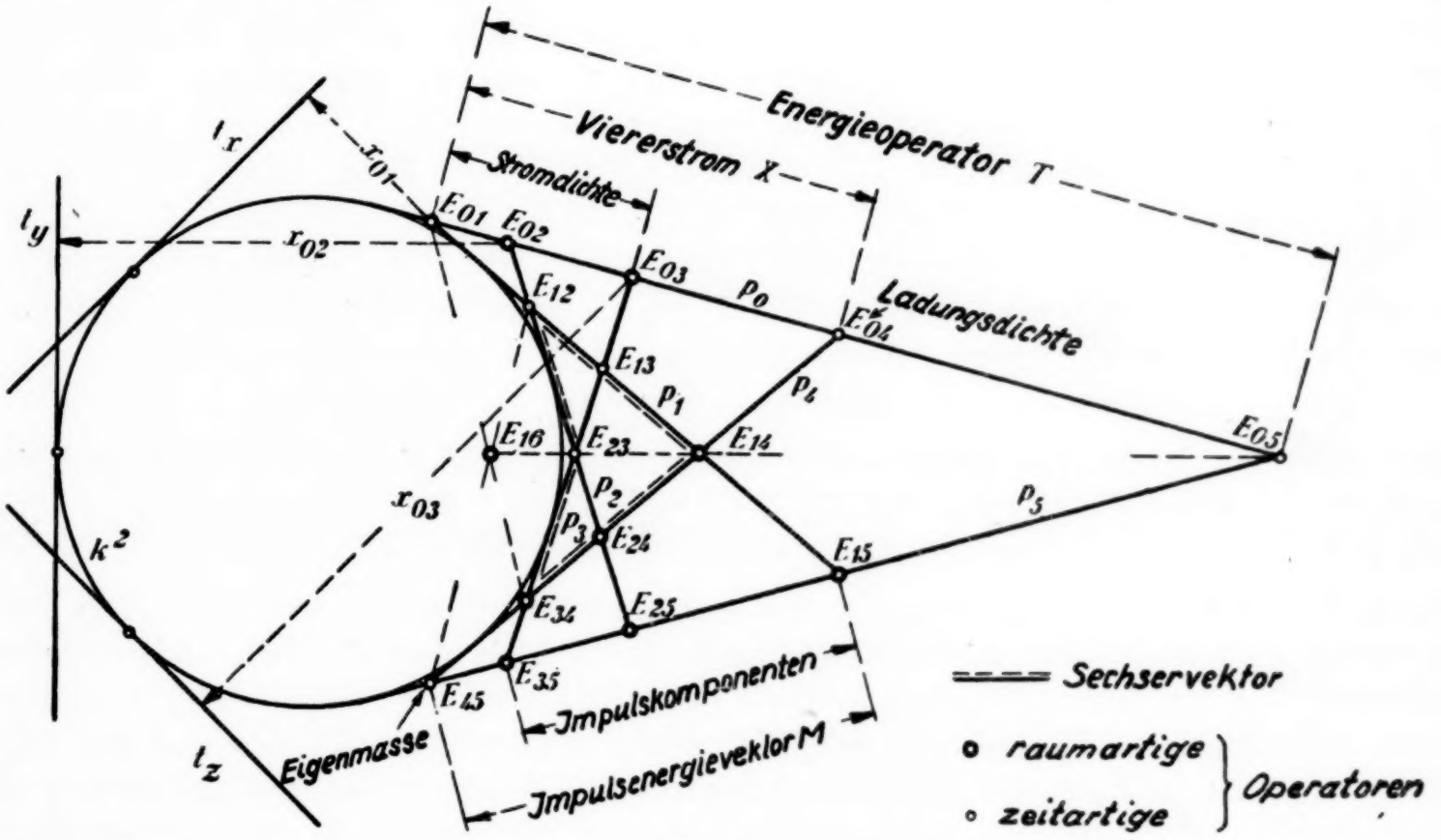


Fig. 3.

6. In der Diracschen Theorie gibt es — wie jede unserer Abbildungen zeigt — drei Arten von Operatorentriaden:

a) Die drei Bildgeraden e_{ik} einer Triade erster Art gehen durch den gleichen Grundpunkt P_i, und ihre drei Bildpunkte E_{ik} liegen auf seiner Polare p_i. Die drei Operatoren E_{ik} gehören der gleichen Pentade an und erfüllen zusammen die Bedingungen (3).

---

[3]) G. Haenzel, Geometrie und Wellenmechanik II, Jahresber. d. D. M. V. **50** (1940).

b) Die drei Bildgeraden e_{ik}, e_{il}, e_{kl} einer Triade zweiter Art bilden ein Dreiseit mit den Ecken P_l, P_k, P_i, ihre drei Bildpunkte E_{ik}, E_{il}, E_{kl} bilden das polar zugeordnete Dreieck mit den Polaren p_l, p_k, p_i als Seiten. Jeder Operator einer Triade zweiter Art resultiert aus den beiden übrigen nach der Gleichung (5), z. B. $E_{kl} = iE_{ik}E_{il}$. Die drei Paare von Punkten und Geraden $P_l e_{ik}$, $P_k e_{il}$, $P_i e_{kl}$ bestimmen als Perspektivitätszentren und Perspektivitätsachsen drei perspektive Involutionen; aus je zwei von ihnen resultiert die dritte und aus der Wiederholung die Identität wie bei den dargestellten Operatoren.

c) Die drei Bildgeraden e_{ik}, e_{lm}, e_{no} einer Triade dritter Art enthalten zusammen die sechs Grundpunkte P_i und durch ihre drei Bildpunkte E_{ik}, E_{lm}, E_{no} gehen zusammen die sechs Polaren p_i. In einer Triade ist daher jede der sechs Pentaden π_i mit einem Operator vertreten.

Die Beziehungen der behandelten Konfigurationen zur Theorie der binären Formen, zur elliptischen Geometrie und zur Auflösung der algebraischen Gleichung fünften Grades durch elliptische Modulfunktionen sind bekannt. Jede der angedeuteten Theorien kann zur Diracschen Theorie in die gleiche Beziehung gesetzt werden.

7. Mehrere gleichartige Teilchen eines Systems — z. B. zwei Elektronen eines Atoms — sind nach der Auffassung der Quantenmechanik nicht unterscheidbar. Ihre Vertauschung ist von keiner beobachtbaren Änderung des Systems begleitet. Zum Aufbau eines Modells für das Diracsche Zweielektronensystem der Wellenmechanik ist daher von zwei einer Kugel einbeschriebenen Ikosaedern E, F auszugehen, die durch Drehung um einen Kugeldurchmesser p mit dem Drehwinkel $\pi/2$ untereinander vertauscht werden. Wir sprechen dabei von der Vertauschungsdrehung $P(\pi/2)$. Es treten einander zwei Fünfzehnerreihen E_{ik}, F_{ik} von Querlinien (Nr. **1** und **4**) der beiden Ikosaeder gegenüber und damit zugleich zwei Reihen von Drehungsachsen. Die beiden Reihen der E_{ik} und F_{ik} werden jetzt aus formalen Gründen mit E_i und F_i bezeichnet, so daß der Index i in beiden Reihen die Werte $i = 01, 02, \ldots, 45$ des Schemas (1) in Nr. **1** annimmt.

Da infinitesimale Drehungen um inzidente Achsen sich geometrisch addieren, resultiert aus den Drehungen $E_l(\Delta\vartheta)$, $F_m(\Delta\vartheta)$ um die Drehungsachsen E_l, F_m bei gleichem und gleichsinnigem Argument $\Delta\vartheta$ eine Drehung

$$D_{lm}(\Delta\theta) = E_l F_m(\Delta\theta).$$

Ihre Achse D_{lm} halbiert in bekannter Weise den Winkel $\sphericalangle E_l F_m$ der Achsen E_l und F_m. Ihr Argument ist $\Delta\theta = 2\Delta\vartheta \cos \frac{\sphericalangle E_l F_m}{2}$. Zu den 30 Drehungsoperatoren, die aus den beiden Fünfzehnerreihen durch Kombination mit der Identität entstehen, treten also 225 Drehungsoperatoren $D_{lm}(\Delta\theta)$ durch Kombination der $E_l(\Delta\vartheta)$ und $F_m(\Delta\vartheta)$. Mit anderen Worten:

Zum doppelten Ikosaedersystem (EF) gehören einschließlich der Identität 256 *Drehungsoperatoren; die* 255 *Achsen der zugehörigen infinitesimalen Drehungen sind die* 2×15 *Querlinien* E_l, F_m *beider Ikosaeder und die* 15^2 *Winkelhalbierenden* D_{lm} *dieser Querlinien* E_l, E_m *als die Achsen der resultierenden Drehungen aus je einer Drehung um* E_l *und einer um* F_m *mit gleichen Argumenten* $\Delta\vartheta$. *Daneben besteht eine Vertauschungsdrehung* $P(\pi/2)$ *vom Argument* $\pi/2$, *die beide Ikosaeder miteinander vertauscht. Diese Operatorenkonfiguration ist die Grundlage zur wellenmechanischen Behandlung des Zweielektronensystems.*

8. Das System von zwei Elektronen e und f soll zunächst ohne Berücksichtigung der gegenseitigen Wechselwirkung behandelt werden. Es seien

$$T_e \psi_e = 0 \text{ und } T_f \psi_f = 0$$

die Wellengleichungen der beiden einzelnen Elektronen mit den beiden Operatorenreihen $E_{01}, E_{02}, E_{03}, E_{04}, E_{05}, E_{15}, \ldots, E_{45}, E_{16}$ und $F_{01}, F_{02}, \ldots, F_{05}, F_{15}, \ldots, F_{45}, F_{16}$ und den Operatoren

$$T_e = E_{01}t_1 + E_{02}t_2 + E_{03}t_3 + E_{04}t_4 + E_{05}t_5,$$
$$T_f = F_{01}t_1' + F_{02}t_2' + F_{03}t_3' + F_{04}t_4' + F_{05}t_5'.$$

Die Koordinaten der beiden Elektronen e und f seien x_i und x_i'. Da die Ladungsdichte des Elektrons e als Wahrscheinlichkeit für die Anwesenheit des Elektrons e im Punkte x_i gedeutet wird und die Ladungsdichte des Elektrons f als die Wahrscheinlichkeit der Anwesenheit von f im Punkte x_i', so liegt die Bedeutung der Wellenfunktion des Zweielektronenproblems (ohne Berücksichtigung der Wechselwirkung) in der gemeinsamen Wahrscheinlichkeit, etwas von beiden Elektronen anzutreffen. Die Wellenfunktion des Zweielektronenproblems $\psi_{ef}(x_i, x_i')$ ist demnach als Produkt von $\psi_e(x_i)$ und $\psi_f(x_i')$ anzusetzen:

$$\psi_{ef}(x_i, x_i') = \psi_e(x_i)\,\psi_f(x_i'). \tag{9}$$

Die Wellenfunktion des Zweielektronensystems genügt der Wellengleichung

$$(T_e + T_f)\,\psi_{ef} = 0, \tag{10}$$

wenn der Operator T_e nur auf ψ_e, der Operator T_f nur auf ψ_f wirkt.

Je zwei entsprechende Operatoren der E_{ik}-Reihe und der F_{ik}-Reihe, d. h. je zwei mit demselben Doppelindex ik, sind vertauschbar, ihre Resultierende ist von ihrer Reihenfolge unabhängig: $E_{ik}F_{ik} = F_{ik}E_{ik}$. Der Operator

$$P = \frac{1}{4}\sum_{i,k} E_{ik}F_{ik} \tag{11}$$

transformiert die eine Operatorenreihe in die andere nach dem Gesetz $F_{ik} = PE_{ik}P$. Da linear unabhängige Lösungen linearer Differentialgleichungen linear kombiniert werden dürfen, lassen sich die Lösungen der Wellengleichung (10) des Zweielektronenproblems folgendermaßen in symmetrische und antisymmetrische Lösungen gliedern:

$$\text{(12 a)} \qquad \text{symmetrische } \psi_{ef}(x_i, x_i') = \psi_e(x_i)\,\psi_f(x_i') + \psi_f(x_i)\,\psi_e(x_i')$$
$$\text{(12 b)} \qquad \text{antisymmetrische } \psi_{ef}(x_i, x_i') = \psi_e(x_i)\,\psi_f(x_i') - \psi_f(x_i)\,\psi_e(x_i').$$

Gleichung (12 a) ist gegen eine Vertauschung der Elektronen invariant, Gleichung (12 b) ändert bei Vertauschung das Vorzeichen. Nach der Fermi-Diracschen Statistik kommen als Ausgangspunkt für die Lösungen des Zweielektronenproblems nur antisymmetrische Eigenfunktionen in Frage.

9. Die beiden Operatorenreihen der E_{ik} und F_{ik} werden jetzt (wie am Ikosaeder in Nr. **7**) mit E_i und F_i bezeichnet, so daß der Index i in beiden Reihen die Bedeutung $i = 01, 02, \ldots, 45$ des Schemas (1) in Nr. **1** annimmt. Aus beiden Operatorenreihen lassen sich durch Kombination 256 Produktoperatoren E_lF_m bilden. Wird berücksichtigt, daß jede Operatorenreihe zehn raumartige Operatoren mit reeller Matrizendarstellung und sechs zeitartige mit imaginärer enthält, so ergibt sich:

Aus den beiden einfachen Operatorenreihen des Zweielektronensystems entstehen 136 *raumartige Operatoren* E_lF_m *und* 120 *zeitartige Operatoren* E_lF_m. *Aus ihnen lassen sich die* 256 *Drehungsoperatoren*

$$D_{lm} = E_{16}F_{16}\cos\vartheta + iE_lF_m\sin\vartheta = e^{iE_lF_m\vartheta} \tag{13}$$

bilden.

Formal existieren daher für das Zweielektronensystem 256 unabhängige Transformationen der Form

(14) $$\psi'_{ef} = D_{lm}\psi_{ef}$$

im Gegensatz zu 16 solchen Transformationen des Einelektronensystems. Aus den 256 Produktoperatoren E_lF_m werden

136 symmetrische Linearkombinationen $\gamma_{lm} = \frac{1}{2}(E_lF_m + E_mF_l)$

und

120 antisymmetrische Linearkombinationen $\zeta_{lm} = \frac{1}{2}(E_lF_m - E_mF_l)$

hergestellt. Die Numerierung der E- und der F-Operatoren ist in beiden Reihen gleichlaufend, und die Matrizendarstellung soll für beide Reihen die gleiche sein. Die 136 γ_{lm} ergeben die 136 Drehungsoperatoren

(16) $$\Delta_{lm} = E_{16}F_{16}\cos\theta + i\gamma_{lm}\sin\theta = e^{i\gamma_{lm}\theta}.$$

Die 136 *Drehungsoperatoren* Δ_{lm} *bestimmen* 136 *Lorentztransformationen, die für die kovarianten Komponenten der Wellenfunktion die Form*

(17) $$\psi' = \Delta_{lm}\psi$$

haben. Sie verwandeln Komponenten symmetrischer (*antisymmetrischer*) *Eigenfunktionen wieder in Komponenten symmetrischer* (*antisymmetrischer*) *Eigenfunktionen.*

Werden andererseits im Transformationsgesetz $\psi' = D_{lm}\psi_{ef}$ nur die 136 raumartigen $D_{lm} = E_{16}F_{16}\cos\vartheta + iE_lF_m\sin\vartheta$ zugelassen, so erhält man 136 unabhängige Transformationen, die eine Änderung der inneren Eigenschaften des Zweielektronensystems bedeuten. Zu den 136 raumartigen Operatoren D_{lm} tritt der Operator $P = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{16} E_iF_i$ (Gleichung (11)) als „Vertauschungsoperator". Er vertauscht die E_i-Operatorenreihe mit der F_i-Operatorenreihe nach dem Gesetz $E_i = PF_iP, F_i = PE_iP$. Da die beiden Elektronen e, f nicht unterscheidbar sind, gibt es eine Vertauschungstransformation; sie wird bewirkt durch den Operator

(18) $$k = E_{16}F_{16}\cos\frac{\varphi}{2} + i(-P+1)\sin\frac{\varphi}{2} = e^{\frac{i}{2}(-P+1)\varphi}.$$

Der Operator k transformiert die antisymmetrische Wellenfunktion in Gleichung (12 b) so, daß für $\varphi = \pi$ die Funktion $\psi_{ef} = -\psi_{fe}$ ist. Er bewirkt also eine Vertauschung der beiden Elektronen, während sich für den Ortsvektor der beiden Ladungen ergibt:

$$\sum_{i=1}^{16}(E_ix_i + F_ix'_i) \to \sum_{i=1}^{16}(E_ix'_i + F_ix_i).$$

Die Transformation vertauscht also Lage- wie Spinkoordinaten. Zwei Elektronen gleichen Quantenzustandes gehören dann und nur dann zu einem stationären System (*He*-Atom oder H_2-Molekel), wenn sie entgegengesetzten Spin haben. Abschließend gilt:

Die 136 *raumartigen Produktoperatoren* E_lF_m *bedingen* 136 *unabhängige raumartige Transformationen* D_{lm}, *d. h.* 136 *Freiheitsgrade. Das durch sie bestimmte Kontinuum* R_{136} *ist der Phasenraum des Zweielektronensystems. Der* 137. *Freiheitsgrad wird durch den Vertauschungsoperator bedingt.*

Der Aufbau eines Phasenraumes für das Zweielektronensystem läßt sich noch in anderer Form durchführen. Dazu werden zwei neue Operatorenreihen von $16C_i$- und von $16D_i$-Operatoren aufgestellt, aus denen 256 Operatoren C_iD_k entstehen. Die 136 raumartigen C_iD_k dieses CD-Systems sind lineare Kombinationen der $136\gamma_{lm}$ des obigen EF-Systems.

Die Punkte des *CD*-Phasenraumes stellen Wahrscheinlichkeitsverteilungen mit festem Moment und unbestimmtem Orte dar, die Punkte des *EF*-Phasenraumes Verteilungen mit festem Ort und unbestimmtem Moment. Die beiden Phasenräume sind konjugiert im Sinne der Heisenbergschen Unbestimmtheitsbeziehung.

10. Die bisher unberücksichtigte Wechselwirkung der beiden Elektronen aufeinander kommt in einer Abänderung der Wellenfunktion (Gleichung (9)) zum Ausdruck. Die Änderung ist bedingt durch einen in der Wellengleichung (10) auftretenden Term der Wechselwirkungsenergie V. Die unter Benutzung der 137 Freiheitsgrade durchgeführte Berechnung liefert — in Einheiten $\frac{hc}{2\pi}$ gemessen — den Wert

$$V = \frac{1}{137 r_{ef}} P.$$

Darin ist r_{ef} der Abstand der beiden Elektronen voneinander. Der skalare Faktor $\frac{1}{137 r_{ef}}$ stellt die Coulombsche Wechselwirkung dar, daher ist 137 der theoretische Wert für die *Feinstrukturkonstante* $\frac{hc}{2\pi e^2}$.

Als zweite Fundamentalkonstante liefert diese Theorie nach Eddington das Massenverhältnis von Proton und Elektron. Tritt die Masse m_1 eines Protons oder Elektrons mit einer neutralen Vergleichsmasse m_2 zusammen, so wird das System Vergleichsmasse-Elektron (Proton) durch einen Doppelwellenvektor ψ_{ef} beschrieben in einem Phasenraum R_{136}, dessen 136 Freiheitsgrade nach Abschnitt **13** durch die 136 raumartigen Produktoperatoren $E_l F_m$ bedingt sind. Der Phasenraum R_{10} des einzelnen Elektrons (Protons) hat nach Abschnitt **2** b) zehn Freiheitsgrade, bedingt durch die zehn raumartigen E-Operatoren. Für den Phasenraum der neutralen Vergleichsmasse m_2 steht nur eine Dimension zur Verfügung. Der Doppelwellenvektor ψ_{ef} stellt sich dann und nur dann als Produkt zweier einfachen Wellenvektoren dar, wenn m_1, m_2 die quadratische Gleichung

$$10 m_1^2 - 136 m_1 m_2 + m_2^2 = 0 \tag{24}$$

erfüllen. Diese Gleichung ist auch die Bedingung dafür, daß sich das Volumenelement dR_{136} des Phasenraumes R_{136} als Produkt der Volumenelemente dR_{10}, dR_1 der Phasenräume R_{10}, R_1 darstellen läßt. Das Verhältnis der beiden Lösungen der Gleichung ist das Massenverhältnis $A = 1847{,}6$ von Proton und Elektron zueinander.

11. Faßt man die Ausführungen der Nummern **7** bis **10** mit den vorhergehenden Ausführungen zusammen, so ist festzustellen:

Das Diracsche Zweielektronensystem hat die Struktur des doppelten Ikosaedersystems ebenso wie das Einelektronensystem die des einfachen Ikosaedersystems. Durch die Bedingungen (Gleichungen (3)) $E_i^2 = 1$, $E_i E_k = -E_k E_i$ *für die fünf Drehungsachsen je einer Pentade am Ikosaedersystem verwandelt sich die geometrische Betrachtung des einfachen und des doppelten Ikosaeders in die physikalische des Ein- und des Zweielektronensystems. Durch diese Bedingungen werden die* 15 *Mittelsenkrechten bzw. Drehungsachsen* E_{ik} *des Ikosaedersystems zu* 15 *Drehungsoperatoren des Einelektronensystems, zehn von ihnen mit reeller, fünf mit imaginärer Matrizendarstellung* (*Nr.* **2**). *Wir erhalten zehn raumartige und fünf zeitartige Operatoren, aus denen sich die übrigen physikalischen Größen ableiten* (*Nr.* **3**—**4**). *In gleicher Weise gehen die* 255 *Drehungsachsen des doppelten Ikosaedersystems* (*Nr.* **7**) *in* 135 *raumartige Operatoren mit reeller Matrizendarstellung und* 120 *zeitartige Operatoren mit imaginärer Matrizendarstellung über. Aus ihnen ergeben sich der Wert der Feinstrukturkonstanten und die Koeffizienten der Gleichung* (19) *zur Bestimmung*

des Massenverhältnisses (*Nr.* **8—10**). *An die Stelle der Vertauschungsdrehung* $P(\pi/2)$ *der beiden Ikosaeder des doppelten Ikosaedersystems tritt mit Hilfe der Gleichungen* (11) *und* (18) *der Vertauschungsoperator des Zweielektronensystems.*

Die Vertauschungsrelation zweier Elektronen kommt dadurch zum Ausdruck, daß die beiden Ikosaeder der doppelten Ikosaederkonfiguration durch die Vertauschungsdrehung ausgetauscht werden, ohne daß die Konfiguration irgendeine Veränderung erfährt. Zur Ortsbestimmung des einzelnen Elektrons sind in das einfache Ikosaedersystem drei metrische Bedingungen einzuführen, in das doppelte Ikosaedersystem sechs. Eine solche Festlegung des Elektronenortes bleibt aber illusorisch, da alle ∞^3 Kugeldrehungen auf ein Ikosaedersystem angewendet werden dürfen ohne Beeinträchtigung der physikalischen Beschreibung.

Eingegangen 14. Juni 1940.

Zur natürlichen Geometrie der irreduziblen G_6 von Berührungstransformationen.

Von *Gerhard Kowalewski* in Prag.

Achtet man darauf, wie die spezielle Affingruppe

$$(1) \qquad \begin{cases} \mathfrak{x} = a_1 x + a_2 z + a \\ \mathfrak{z} = b_1 x + b_2 z + b \end{cases} \qquad (a_1 b_2 - a_2 b_1 = 1)$$

auf das Integral

$$y = \int z\, dx$$

einwirkt, so erweitert sich das Gleichungssystem (1) um

$$\mathfrak{y} = \int (b_1 x + b_2 z + b)(a_1 dx + a_2 dz),$$

d. h. um

$$(1') \qquad \mathfrak{y} = y + \frac{1}{2} a_1 b_1 x^2 + a_2 b_1 xz + \frac{1}{2} a_2 b_2 z^2 + a_1 bx + a_2 bz + c.$$

Benutzt man für $z = \dfrac{dy}{dx}$ die Bezeichnung y_1, so hat man folgende Gruppe von Berührungstransformationen vor sich:

$$(2) \qquad \begin{cases} \mathfrak{x} = a_1 x + a_2 y_1 + a \\ \mathfrak{y} = y + \dfrac{1}{2} a_1 b_1 x^2 + a_2 b_1 x y_1 + \dfrac{1}{2} a_2 b_2 y_1^2 + a_1 bx + a_2 b y_1 + c \\ \mathfrak{y}_1 = b_1 x + b_2 y_1 + b. \end{cases}$$

Das ist in neuer Auffassung die irreduzible Liesche G_6. Ihre infinitesimalen Transformationen, die allein in Band II des Lie-Engelschen Werkes angegeben sind, lauten:

$$p,\ q,\ xp - y_1 q_1,\ xq + q_1,\ x^2 q + 2xq_1,\ 2y_1 p + y_1^2 q.$$

Will man für diese G_6 eine natürliche Geometrie aufbauen, so muß man die Fundamentalgrößen (Bogenelement, Differentialinvariante, Relativkoordinaten) berechnen. Dabei kann man sich weitgehend auf bekannte Dinge aus der natürlichen Geometrie der Gruppe (1) stützen.

Erweitert man die Gruppe (1) auf die dritte Ordnung, so treten zu (1) folgende Gleichungen hinzu:

$$\mathfrak{z}_1 = \frac{b_1 + b_2 z_1}{a_1 + a_2 z_1}, \qquad \mathfrak{z}_2 = \frac{z_2}{(a_1 + a_2 z_1)^3}, \qquad \mathfrak{z}_3 = \frac{z_3}{(a_1 + a_2 z_1)^4} - \frac{3 a_2 z_2^2}{(a_1 + a_2 z_1)^5}.$$

Aus der zweiten Gleichung entnimmt man sofort den bekannten Ausdruck für das Bogenelement der Gruppe (1), nämlich $z_2^{\frac{1}{3}} dx = ds$. Ferner ergibt sich aus obigen Gleichungen, daß die Größen

$$\varrho = z_2^{-\frac{1}{3}}, \qquad \sigma = z_1 z_2^{-\frac{1}{3}}$$

sich ebenso transformieren, wie die Koordinatendifferenzen $x^* - x$, $z^* - z$. Dasselbe gilt von den Größen

$$\tau = z_2^{-\frac{5}{3}} z_3, \qquad \omega = z_2^{-\frac{5}{3}} (z_1 z_3 - 3 z_2^2).$$

Hieraus folgt die Invarianteneigenschaft der beiden Ausdrücke

$$u = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} \tau & \omega \\ x^* - x & z^* - z \end{vmatrix}, \qquad w = \begin{vmatrix} \varrho & \sigma \\ x^* - x & z^* - z \end{vmatrix},$$

die sich beim Übergange zu dem Anfangselement

$$(3) \qquad x = 0, \quad z = 0, \quad z_1 = 0, \quad z_2 = 1, \quad z_3 = 0$$

auf x^*, z^* reduzieren. Sie sind also die auf dieses Anfangselement geeichten Relativkoordinaten. Ihre ausführlichen Schreibungen lauten:

$$u = \frac{1}{3} z_2^{-\frac{5}{3}} z_3 \{z^* - z - z_1 (x^* - x)\} + z_2^{\frac{1}{3}} (x^* - x)$$

$$w = z_2^{-\frac{1}{3}} \{z^* - z - z_1 (x^* - x)\}.$$

Bildet man nun in der üblichen Weise die Identitätsbedingungen, indem man x^*, z^* festhält und das Bezugselement x, z, z_1, z_2, z_3 längs einer Kurve variieren läßt, so findet man

$$(4) \qquad \frac{du}{ds} = \frac{1}{3} Jw - 1, \qquad \frac{dw}{ds} = -u.$$

Hierbei ist

$$J = \frac{d(z_2^{-\frac{5}{3}} z_3)}{dx},$$

und es ergibt sich aus der Invarianteneigenschaft von u, w, $\frac{du}{ds}$, $\frac{dw}{ds}$, daß auch J eine Invariante ist, und zwar die niedrigste Differentialinvariante der Gruppe (1). Ihr ausführlicher Ausdruck lautet $z_2^{-\frac{5}{3}} z_4 - \frac{5}{3} z_2^{-\frac{8}{3}} z_3^2$. Sie reduziert sich beim Übergange zum Anfangselement (3) auf z_4, während ds in dx übergeht. J und ds sind also, ebenso wie u und w, auf dieses Anfangselement geeicht.

Aus diesen Feststellungen über die spezielle Affingruppe ergeben sich sofort Aussagen über die Gruppe (2), wenn man die Einsetzung $z = y_1$ macht. Diese Gruppe hat also das Bogenelement

$$ds = y_3^{\frac{1}{3}} dx$$

und die Differentialinvariante

$$J = \frac{d(y_3^{-\frac{5}{3}} y_4)}{dx}.$$

Ferner können wir von den drei Relativkoordinaten des Elements x^*, y^*, y_1^* inbezug auf x, y, y_1, y_2, y_3, y_4 zwei angeben, nämlich

$$u = \frac{1}{3} y_3^{-\frac{5}{3}} y_4 \{y_1^* - y_1 - y_2 (x^* - x)\} + y_3^{\frac{1}{3}} (x^* - x)$$

$$w = y_3^{-\frac{1}{3}} \{y_1^* - y_1 - y_2 (x^* - x)\}.$$

Wird als Anfangselement

(5) $$x = 0, \quad y = 0, \quad y_1 = 0, \quad y_2 = 0, \quad y_3 = 1, \quad y_4 = 0$$

benutzt, so reduzieren sich beim Übergange zu ihm u und w auf x^* und y_1^*. Es fehlt uns nur noch die dritte Relativkoordinate, die sich beim Übergange zu (5) in y^* verwandelt. Diese dritte Relativkoordinate v wird durch das Integral $\int w\,du$ dargestellt, wobei x, y, y_1, y_2, y_3, y_4 als feste Werte zu betrachten sind. Offenbar ist nun

$$u = \frac{1}{3}\, y_3^{-\frac{4}{3}} y_4 w + y_3^{\frac{1}{3}} (x^* - x),$$

also

$$v = \int w\,du = \frac{1}{3}\, y_3^{-\frac{4}{3}} y_4 \int w dw + \int \{y_1^* - y_1 - y_2 (x^* - x)\}\, dx^*$$

$$= \frac{1}{6}\, y_3^{-\frac{4}{3}} y_4 w^2 + y^* - y - y_1 (x^* - x) - \frac{1}{2}\, y_2 (x^* - x)^2,$$

mithin

(6) $$v = y^* - y - y_1 (x^* - x) - \frac{1}{2}\, y_2 (x^* - x)^2 + \frac{1}{6}\, y_3^{-2} y_4 \{y_1^* - y_1 - y_2 (x^* - x)\}^2.$$

Dieser Ausdruck reduziert sich beim Übergange zum Anfangselement (5) auf y^*. Es muß noch nachgeprüft werden, ob wir die Integrationskonstante, d. h. den von x^*, y^*, y_1^* freien Bestandteil, richtig gewählt haben. Bezeichnet man mit e das Bezugselement x, y, y_1, y_2, y_3, y_4 und mit e_0 das Anfangselement (5), so gilt für u, v, w die Cartansche Formel

$$(u, v, w) = (x^*, y^*, y_1^*) T_e^{e_0}.$$

Dabei ist $T_e^{e_0}$ diejenige Transformation der G_6, die e in e_0 überführt. Fallen nun x^*, y^*, y_1^* mit x, y, y_1, d. h. mit den drei ersten Koordinaten von e zusammen, so gehen sie bei $T_e^{e_0}$ in die drei ersten Koordinaten von e_0 über, also in 0, 0, 0. Man ersieht hieraus, daß u, v, w verschwinden müssen, wenn man die Sterne beseitigt. Man erkennt aus (6), daß auch v diese Eigenschaft hat. Die Integrationskonstante ist also richtig gewählt. Auf Grund der Bezeichnung $v = \int w\,du$ kann man $w = \dfrac{dv}{du}$ mit v_1 bezeichnen und die Relativkoordinaten von x^*, y^*, y_1^* inbezug auf x, y, y_1, y_2, y_3, y_4 in folgender Weise schreiben, wobei wir noch die Abkürzungen

$$\alpha = x^* - x, \qquad \beta = y^* - y - y_1 (x^* - x) - \frac{1}{2}\, y_2 (x^* - x)^2, \qquad \gamma = y_1^* - y_1 - y_2 (x^* - x)$$

benutzen:

(7) $$\begin{cases} u = \alpha y_3^{\frac{1}{3}} + \dfrac{1}{3}\, \gamma y_3^{-\frac{2}{3}} y_4 \\ v = \beta + \dfrac{1}{6}\, \gamma^2 y_3^{-2} y_4 \\ v_1 = \gamma y_3^{-\frac{1}{3}}. \end{cases}$$

Wir wissen bereits aus (4), wie sich u und v_1 verhalten, wenn man x^*, y^*, y_1^* festhält und das Bezugselement längs einer Kurve variieren läßt. Es fehlt noch eine Feststellung über das Verhalten von v. Da

$$\frac{d\beta}{ds} = -\frac{1}{2}\, y_3^{\frac{2}{3}} (x^* - x)^2, \qquad \frac{d\gamma}{ds} = -\, y_3^{\frac{2}{3}} (x^* - x)$$

ist, so ergibt sich mit Rücksicht auf

$$\frac{d(y_3^{-2}y_4)}{dx} = \frac{d(y_3^{-\frac{5}{3}}y_4 \cdot y_3^{-\frac{1}{3}})}{dx} = Jy_3^{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}\, y_3^{-3}y_4^2$$

oder

$$\frac{d(y_3^{-2}y_4)}{ds} = Jy_3^{-\frac{2}{3}} - \frac{1}{3}\, y_3^{-\frac{10}{3}}y_4^2$$

für $\frac{dv}{ds}$ folgender Ausdruck:

$$-\frac{1}{2}\,\alpha^2 y_3^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{3}\,\alpha\gamma y_3^{-\frac{4}{3}}y_4 - \frac{1}{18}\,\gamma^2 y_3^{-\frac{10}{3}}y_4^2 + \frac{1}{6}\,\gamma^2 J y_3^{-\frac{2}{3}}.$$

Hiernach ist

$$\frac{dv}{ds} = \frac{1}{6}\,Jv_1^2 - \frac{1}{2}\,u^2.$$

Somit lauten die Identitätsbedingungen in der natürlichen Geometrie der G_6, wie folgt:

$$(8) \qquad \begin{cases} \dfrac{du}{ds} = \dfrac{1}{3}\,Jv_1 - 1 \\ \dfrac{dv}{ds} = \dfrac{1}{6}\,Jv_1^2 - \dfrac{1}{2}\,u^2 \\ \dfrac{dv_1}{ds} = \qquad\quad - u. \end{cases}$$

Ich fasse sie in der *Identitätsformel*

$$(8^*) \qquad \frac{df}{ds} = -\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{1}{2}\,u^2\frac{\partial f}{\partial v} - u\,\frac{\partial f}{\partial v_1} + \frac{1}{6}\,J\left(2v_1\frac{\partial f}{\partial u} + v_1^2\frac{\partial f}{\partial v}\right)$$

zusammen. Bezeichnet man die in u, v, v_1 geschriebenen Infinitesimaltransformationen der G_6, also

$$\frac{\partial f}{\partial u},\ \frac{\partial f}{\partial v},\ u\frac{\partial f}{\partial u} - v_1\frac{\partial f}{\partial v_1},\ u\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial v_1},\ u^2\frac{\partial f}{\partial v} + 2u\frac{\partial f}{\partial v_1},\ 2v_1\frac{\partial f}{\partial u} + v_1^2\frac{\partial f}{\partial v},$$

der Reihe nach mit $W_1 f, \ldots, W_6 f$, so lautet die Identitätsformel:

$$\frac{df}{ds} = -W_1 f - \frac{1}{2}\,W_5 f + \frac{1}{6}\,JW_6 f.$$

Nach meinem Zweistämmigkeitssatz läßt sich aus den beiden hier auftretenden Symbolen $W_I f = W_1 f + \frac{1}{2}\,W_5 f$, $W_{II} f = W_6 f$ die ganze Gruppe durch fortgesetztes Klammern mit $W_I f$ gewinnen. Das in der Identitätsformel mit negativem Zeichen auftretende Symbol $W_I f - \frac{J}{6}\,W_{II} f$ stellt die sogenannte Schmiegungstransformation dar. Läßt man sie auf $Wf = \Sigma c_\nu W_\nu f$ einwirken, so vollzieht sich in den c_ν folgende infinitesimale Transformation:

$$c_3\frac{\partial f}{\partial c_1} + c_4\frac{\partial f}{\partial c_2} + 2c_6\frac{\partial f}{\partial c_3} + (2c_5 - c_1)\frac{\partial f}{\partial c_4} - c_3\frac{\partial f}{\partial c_5} + \frac{J}{3}\left(c_4\frac{\partial f}{\partial c_1} + 2c_5\frac{\partial f}{\partial c_3} - c_3\frac{\partial f}{\partial c_6}\right).$$

Ihre charakteristische Gleichung lautet:

$$\varrho^2\left(\varrho^2+\frac{J}{3}\right)\left(\varrho^2+\frac{4J}{3}\right)=0. \tag{9}$$

Nur im Falle $J=0$ findet ein außergewöhnliches Zusammenrücken der Wurzeln statt. 0 ist also nach meiner Terminologie der einzige singuläre J-Wert. Eine Kurve, längs welcher J konstant bleibt, heißt eine *J-Kurve* der Gruppe. Ist der konstante Wert von J ein singulärer, so spreche ich von einer *singulären J-Kurve.* Im vorliegenden Falle sind die singulären J-Kurven durch $J=0$ gekennzeichnet.

Um die durch das Anfangselement e_0 hindurchgehende singuläre J-Kurve zu finden, muß man die Differentialgleichung $J=0$, d. h.

$$\frac{d(y_3^{-\frac{5}{3}}y_4)}{dx}=0,$$

integrieren, und zwar unter Zugrundelegung der Anfangswerte 0, 1, 0, 0, 0 für y_4, y_3, y_2, y_1, y. Man findet $y=\frac{x^3}{6}$. Diese kubische Parabel ist also die durch e_0 hindurchgehende singuläre J-Kurve.

Um die durch e_0 hindurchgehenden allgemeinen J-Kurven zu gewinnen, muß man

$$\frac{d(y_3^{-\frac{5}{3}}y_4)}{dx}=-3k$$

unter Zugrundelegung der vorhin genannten Anfangswerte integrieren. Es ergibt sich zunächst

$$y_3^{-\frac{5}{3}}y_4=-3kx$$

und weiter

$$y_3^{-\frac{2}{3}}=1+kx^2,$$

weil y_3 den Anfangswert 1 hat. Aus

$$y_3=(1+kx^2)^{-\frac{3}{2}}$$

erhält man sodann

$$y_2=x(1+kx^2)^{-\frac{1}{2}},\qquad y_1=\frac{1}{k}\{(1+kx^2)^{\frac{1}{2}}-1\}$$

und schließlich

$$y=\frac{1}{k}\int_0(1+kx^2)^{\frac{1}{2}}\,dx-\frac{x}{k}. \tag{10}$$

Führt man den Bogen

$$s=\int_0(1+kx^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

ein, so gilt für die J-Kurve (10) folgende natürliche Parameterdarstellung, wobei die Fälle $k=\varkappa^2$ und $k=-\varkappa^2$ zu unterscheiden sind:

$$y=\frac{s}{2\varkappa^2}+\frac{\operatorname{Sin}2\varkappa s}{4\varkappa^3}-\frac{\operatorname{Sin}\varkappa s}{\varkappa^3},\qquad x=\frac{\operatorname{Sin}\varkappa s}{\varkappa}\qquad(k=\varkappa^2), \tag{10'}$$

$$y=-\frac{s}{2\varkappa^2}-\frac{\sin 2\varkappa s}{4\varkappa^3}+\frac{\sin\varkappa s}{\varkappa^3},\quad x=\frac{\sin\varkappa s}{\varkappa}\qquad(k=-\varkappa^2). \tag{10''}$$

Bildet man zu diesen Kurven die Differentialkurven, indem man als Ordinaten z die Ableitungen y_1 aufträgt, so findet man

$$z = \frac{1}{\varkappa^2}(\operatorname{Cos}\varkappa s - 1), \qquad x = \frac{\operatorname{Sin}\varkappa s}{\varkappa},$$

bzw.

$$z = \frac{1}{\varkappa^2}(1 - \cos\varkappa s), \qquad x = \frac{\sin\varkappa s}{\varkappa}.$$

Im ersten Falle liegt eine Hyperbel, im zweiten eine Ellipse vor. Beide gehen durch das Element (3) hindurch. Die Differentialkurve der kubischen Parabel $y = \frac{x^3}{6}$ ist die durch das Element (3) hindurchgehende Parabel $z = \frac{x^2}{2}$. Diese Kurven sind als J-Kurven der Gruppe (1) bekannt.

Man hätte die J-Kurven der G_6 ebenso leicht durch Integration der Identitätsbedingungen (8) mit konstanten J gewinnen können, wie ich dies in früheren Arbeiten gezeigt habe.

Die Gruppe G_6 hat, wie wir noch hervorheben wollen, die Eigenschaft, daß ihre J-Kurven mit ihren geodätischen Linien, d. h. mit den Extremalen des Variationsproblems

$$\int y_3^{\frac{1}{3}}\,dx,$$

identisch sind. In der Tat lautet die Eulersche Gleichung:

$$(y_3^{-\frac{2}{3}})''' = 0$$

oder

$$(y_3^{-\frac{5}{3}}y_4)'' = 0,$$

d. h. $J' = 0$, also $J = \text{Const.}$

Noch eine andere Besonderheit der G_6 sei erwähnt. Nach dem Lieschen Abzählungsverfahren muß es bei dieser Gruppe eine Invariante geben, die nur von $x^*, y^*, y_1^*, x, y, y_1, y_2$ abhängt. In Wirklichkeit fällt aber y_2 heraus, so daß es sich um eine Invariante zweier Linienelemente handelt. Aus (7) ergibt sich nämlich

$$v - \frac{1}{2}uv_1 = \beta - \frac{1}{2}\alpha\gamma = y^* - y - \frac{1}{2}(y_1 + y_1^*)(x^* - x).$$

Da u, v, v_1 Invarianten sind, ist auch

$$\varphi = y^* - y - \frac{1}{2}(y_1 + y_1^*)(x^* - x) \tag{11}$$

eine solche. $\varphi = c$ bedeutet, daß das Linienelement x^*, y^*, y_1^* der Parabel

$$y^* = y + y_1(x^* - x) + \lambda(x^* - x)^2 + c \tag{12}$$

angehört.

Differenziert man φ unter Festhaltung von x^*, y^*, y_1^*, so ergibt sich nach (8)

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{2}v_1, \qquad \frac{d^2\varphi}{ds^2} = -\frac{1}{2}u.$$

u, v, v_1 drücken sich also in folgender Weise durch φ aus:

$$u = -2\frac{d^2\varphi}{ds^2}, \qquad v = \varphi - 2\frac{d\varphi}{ds}\frac{d^2\varphi}{ds^2}, \qquad v_1 = 2\frac{d\varphi}{ds}. \tag{13}$$

Bildet man noch die dritte Ableitung von φ, so ergibt sich

$$\frac{d^3\varphi}{ds^3} + \frac{1}{3} J \frac{d\varphi}{ds} - \frac{1}{2} = 0. \tag{14}$$

Beim Übergange zu e_0 nehmen $\varphi, \frac{d\varphi}{ds}, \frac{d^2\varphi}{ds^2}$ die Werte

$$y^* - \frac{1}{2} x^* y_1^*, \qquad \frac{1}{2} y_1^*, \qquad -\frac{1}{2} x^* \tag{15}$$

an.

Liegt nun eine durch e_0 hindurchgehende Kurve mit der natürlichen Gleichung $J = J(s)$ vor, wobei s der von e_0 aus gerechnete Bogen ist, d. h. $s = \int_0 y_3^{\frac{1}{3}} dx$, so bietet sich zur Bestimmung der Kurve folgender Weg. ψ_1, ψ_2, ψ_3 seien diejenigen Lösungen der zu (14) gehörigen verkürzten Gleichung

$$\frac{d^3\psi}{ds^3} + \frac{1}{3} J \frac{d\psi}{ds} = 0,$$

deren Wronskische Matrix für $s = 0$ mit der Einheitsmatrix zusammenfällt. Ferner sei χ diejenige Lösung der Gleichung (14), die für $s = 0$ nebst ihrer ersten und zweiten Ableitung verschwindet. Dann ist mit Rücksicht auf die Anfangswerte (15)

$$\varphi = \left(y^* - \frac{1}{2} x^* y_1^*\right) \psi_1(s) + \frac{1}{2} y_1^* \psi_2(s) - \frac{1}{2} x^* \psi_3(s) + \chi(s).$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit

$$\varphi = y^* - y - \frac{1}{2} (y_1 + y_1^*)(x^* - x);$$

so ergibt sich $\psi_1(s) = 1$, ferner

$$x = \psi_2(s), \qquad y_1 = \psi_3(s), \qquad y - \frac{1}{2} x y_1 = -\chi(s).$$

Es gilt also für die betrachtete Kurve folgende natürliche Parameterdarstellung:

$$x = \psi_2(s), \qquad y = \frac{1}{2} \psi_2(s)\, \psi_3(s) - \chi(s), \qquad y_1 = \psi_3(s). \tag{16}$$

Da $y_1 = \frac{dy}{dx}$ sein muß, so ergibt sich folgende Beziehung:

$$\chi' = \frac{1}{2}(\psi_2 \psi_3' - \psi_3 \psi_2'),$$

die sich leicht direkt bestätigen läßt und damit zusammenhängt, daß die Wronskische Determinante von ψ_1, ψ_2, ψ_3 den Wert 1 hat. Man kann auf Grund dieser Beziehung schreiben

$$x = \psi_2(s), \qquad y = \int_0 \psi_3(s)\, \psi_2'(s)\, ds. \tag{16*}$$

Daraus ergibt sich dann $y_1 = \psi_3(s)$.

Wir wollen dieses Verfahren, das sich auch auf andere Gruppen übertragen läßt und eine methodische Bereicherung der natürlichen Geometrie darstellt, an einigen Beispielen erläutern.

Im Falle $J = 0$ ist $\psi_2(s) = s$, $\psi_3(s) = \frac{s^2}{2}$, also

$$x = s, \qquad y = \int_0 \frac{s^2}{2}\, ds = \frac{s^3}{6},$$

in Übereinstimmung mit unseren früheren Ergebnissen. Im Falle $J = -3\varkappa^2$ handelt es sich darum, für

$$\frac{d^3\psi}{ds^3} - \varkappa^2 \frac{d\psi}{ds} = 0$$

die Lösungen ψ_2, ψ_3 zu finden. Offenbar ist hier

$$\psi_2 = \frac{\operatorname{Sin} \varkappa s}{\varkappa}, \qquad \psi_3 = \frac{\operatorname{Cos} \varkappa s - 1}{\varkappa^2}.$$

Nach (16*) hat man also

$$x = \frac{\operatorname{Sin} \varkappa s}{\varkappa}, \qquad y = \int_0 \frac{\operatorname{Cos}^2 \varkappa s - \operatorname{Cos} \varkappa s}{\varkappa^2}\, ds = \frac{s}{2\varkappa^2} + \frac{\operatorname{Sin} 2\varkappa s}{4\varkappa^3} - \frac{\operatorname{Sin} \varkappa s}{\varkappa^3},$$

in Übereinstimmung mit (10′). Im Falle $J = 3\varkappa^2$ handelt es sich um

$$\frac{d^3\psi}{ds^3} + \varkappa^2 \frac{d\psi}{ds} = 0.$$

Hier ist

$$\psi_2 = \frac{\sin \varkappa s}{\varkappa}, \qquad \psi_3 = \frac{1 - \cos \varkappa s}{\varkappa^2},$$

also nach (16*)

$$x = \frac{\sin \varkappa s}{\varkappa}, \qquad y = \int_0 \frac{\cos \varkappa s - \cos^2 \varkappa s}{\varkappa^2}\, ds = -\frac{s}{2\varkappa^2} - \frac{\sin 2\varkappa s}{4\varkappa^3} + \frac{\sin \varkappa s}{\varkappa^3},$$

im Einklang mit (10″).

Als letztes Beispiel behandeln wir

$$J = 18 - 12s^2.$$

Hier handelt es sich um die Differentialgleichung

$$\frac{d^3\psi}{ds^3} + (6 - 4s^2)\frac{d\psi}{ds} = 0.$$

Sie hat die Lösungen

$$1, \quad e^{-s^2}, \quad 2e^{-s^2}\int_0 e^{2s^2} ds - \int_0 e^{s^2} ds.$$

Aus ihnen lassen sich ψ_2 und ψ_3 zusammenbauen, und zwar ist

$$\psi_2 = 2e^{-s^2}\int_0 e^{2s^2} ds - \int_0 e^{s^2} ds$$

$$\psi_3 = \frac{1}{2}(1 - e^{-s^2}).$$

Nach (16*) findet man

$$x = 2e^{-s^2}\int_0 e^{2s^2} ds - \int_0 e^{s^2} ds$$

$$y = \left(e^{-s^2} - \frac{1}{2}\, e^{-2s^2}\right)\int_0 e^{2s^2} ds - \frac{1}{2}\int_0 e^{s^2} ds.$$

Eingegangen 30. August 1940.

Eine Verallgemeinerung der Fermatschen Vermutung.

Von *Johann Bitterlich-Willmann* in Prag.

In der vorliegenden Arbeit wird folgende Verallgemeinerung der Fermatschen Vermutung aufgestellt:

1. Die Lösungsanzahl $H(n, 2; M^n)$ der Gleichung $x^2 + y^2 = z^n$, wobei $z \leqq M$, genügt der Limesbeziehung:

$$\lim_{M \to \infty} \frac{H(n, 2; M^n)}{M} = C(n, 2)$$

($C(n, 2)$ bezeichnet eine nur von n abhängige Konstante).

2. Die Lösungsanzahl $H(2, 3; M^2)$ der Gleichung $x^3 + y^3 = z^2$, wobei $z \leqq M$, genügt der Limesbeziehung:

$$\lim_{M \to \infty} \frac{H(2, 3; M^2)}{\sqrt[3]{M}} = C(2, 3)$$

($C(2, 3)$ ist ebenfalls eine Konstante).

3. Dies sind die einzig möglichen Zerlegungen einer n-ten Potenz in die Summe zweier k-ter Potenzen.

Die Wahrscheinlichkeit, daß eine beliebige Zahl aus der Reihe

(1) $$1, 2, 3, \ldots, M^n$$

k-te Potenz ist, beträgt:

(2) $$\frac{\left[M^{\frac{n}{k}}\right]}{M^n}$$

($[x]$ bezeichnet die in x enthaltene größte ganze Zahl).

Es wird nun nach der Wahrscheinlichkeit einer Zerlegung einer n-ten Potenz z^n in die Summe zweier k-ter Potenzen gefragt: $z^n = x^k + y^k$. Dabei soll $z \leqq M$ sein. Sie ist gleich der Wahrscheinlichkeit, daß eine beliebige Zahl aus der Reihe

(3) $$2^n - 1^k,\ 2^n - 2^k,\ 2^n - 3^k,\ \ldots,\ 2^n - \left[2^{\frac{n}{k}}\right]^k;\ 3^n - 1^k,\ 3^n - 2^k,\ \ldots,\ 3^n - \left[3^{\frac{n}{k}}\right];$$
$$\ldots;\ M^n - 1^k,\ M^n - 2^k,\ \ldots,\ M^n - \left[M^{\frac{n}{k}}\right]^k$$

k-te Potenz ist und beträgt, wenn mit $H(n, k; M^n)$ die Anzahl der k-ten Potenzen in (3) bezeichnet wird:

$$\frac{H(n, k; M^n)}{\left[2^{\frac{n}{k}}\right] + \left[3^{\frac{n}{k}}\right] + \cdots + \left[M^{\frac{n}{k}}\right]}.$$

Dieser Ausdruck ist quotientenasymptotisch bis auf eine multiplikative Konstante gleich:

$$\frac{H(n, k; M^n)}{M^{\frac{n}{k}+1}}. \tag{4}$$

Man kann sich Reihe (3) aus Reihe (1) durch eine bestimmte Auswahl entstanden denken. Es wird nun folgende Annahme gemacht: Das Auswahlgesetz verläuft regellos in bezug auf das Merkmal, k-te Potenz zu sein, in dem abgeschwächten Sinne, daß der Quotient der beiden Wahrscheinlichkeiten für $M \to \infty$ gegen eine Konstante strebt, die von Eins verschieden sein kann.

Die analoge Annahme führt zu den asymptotischen Ausdrücken für die Anzahl der Primzahlzwillinge und der Goldbach-Zerlegungen, wie sie V. Brun heuristisch mit Hilfe des Siebes von Erathostenes aufstellte[1]). In diesen Fällen läßt sie sich aus der Tatsache wahrscheinlich machen, daß alle zu einem Modul teilerfremden Reste in der Primzahlreihe gleichverteilt sind. Hier ist es nicht möglich, eine Plausibilitätsbetrachtung auf dieser Grundlage zu geben, da sich kein entsprechendes Kriterium dafür aufstellen läßt, wann eine Zahl k-te Potenz ist. Für einige Spezialfälle bewährt sich die Annahme jedenfalls, wodurch ihre Wahrscheinlichkeit erhöht wird.

Damit ergibt sich unter Beachtung von (2) und (4) die Beziehung:

$$\lim_{M\to\infty} \frac{H(n, k; M^n)}{M^{1+2\frac{n}{k}-n}} = C(n, k). \tag{5}$$

Für die Spezialfälle $n = 1$, k beliebig und $n = 2$, $k = 2$ läßt sich leicht ihre Richtigkeit zeigen.

Aus (5) folgt, daß nur jene Zerlegungen möglich sind, für die

$$1 + 2\frac{n}{k} - n \geqq 0$$

ist. Die Ungleichung wird einzig für folgende Werte erfüllt:

$$\begin{aligned} k &= 2,\ n = 2, 3, 4, \ldots \\ k &= 3,\ n = 2, 3 \\ k &= 4,\ n = 2 \end{aligned}$$

(von den trivialen Fällen $n = 1$ und $k = 1$ abgesehen). In den beiden Fällen $n = 3$, $k = 3$ und $n = 2$, $k = 4$ sind die Lösungsanzahlen nach (5) Konstante; infolge der Unlösbarkeit der Gleichungen $x^3 + y^3 = z^3$ und $x^4 + y^4 = z^2$ in ganzen Zahlen müssen die beiden Konstanten gleich Null sein. Für die übrigen Werte von n und k erhält man aus (5) die eingangs angegebenen Beziehungen für die Lösungsanzahlen. Zusammenfassend läßt sich die aufgestellte Vermutung aussprechen.

---

[1]) V. Brun, Über das Goldbachsche Gesetz und die Anzahl der Primzahlpaare, Arch. for Math. og Naturv. **34**.

Eingegangen 6. Oktober 1940.

PREUSSISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

VORTRÄGE UND SCHRIFTEN

Die „Vorträge und Schriften" wenden sich an die weiten Kreise derer, die an wissenschaftlicher Forschungsarbeit Anteil nehmen

Bisher sind erschienen:

1. Heft: Wesen und Aufgaben der Akademie. Vier Vorträge von Th. Vahlen, E. Heymann, L. Bieberbach und H. Grapow. 8°. III, 43 Seiten. 1940. RM 2.—

2. Heft: Bodenordnung als volkspolitische Aufgabe und Zielsetzung nationalsozialistischen Ordnungswillens. Festrede am Leibniztag der Preußischen Akademie der Wissenschaften am 27. 6. 1940 gehalten von Prof. Dr. Konrad Meyer. 8°. III, 25 Seiten und eine Tafel. 1940. RM 1.20

3. Heft: Die kosmische Ultrastrahlung als Forschungsproblem, von H. Geiger. Öffentlicher Vortrag, gehalten am 23. Oktober 1940 an der Preußischen Akademie der Wissenschaften. 8°. 33 Seiten. 1940. RM 1.30

4. Heft: Nationalgedanke und Dichtung in Italien, von E. Winkler. 8°. 31 Seiten. 1940. RM 1.20

5. Heft: Die alten Bevölkerungsverhältnisse Rußlands im Lichte der Sprachforschung. Von M. Vasmer. 8°. 35 Seiten mit einer Karte. 1941. RM 1.85

6. Heft: Caesars weltgeschichtliche Leistung. Von Prof. Dr. Matthias Gelzer. 8°. 34 Seiten. 1941. RM 1.30

7. Heft: Stoffe, Kräfte und Gedanken als Träger chemischer Gestaltung. Von Prof. Dr. Peter A. Thiessen. 8°. 27 Seiten. 1941. RM 1.—

8. Heft: Die biologische Chemie im Dienste der Volksgesundheit. Festrede am Friedrichstag der Preußischen Akademie der Wissenschaften am 23. Januar 1941 gehalten von Prof. Dr. Adolf Butenandt. 8°. 21 Seiten. 1941. Im Druck.

Die Hefte erscheinen in zwangloser Folge

VERLAG WALTER DE GRUYTER & CO · BERLIN W 35